جمهورية العراق
وزارة التربية
المديرية العامة للمناهج



تأليف

الدكتور / طارق شعبان رجب الحديثي
محمد عبد الغفور الجواهري
يوسف شريف المعمار

الطبعة الرابعة عشر
١٤٤٥هـ/٢٠٢٣م

المشرف العلمي على الطبع

صبيحة عبد الحسن ناصر

المشرف الفني على الطبع

د. علي مصطفى كمال رفيق

الموقع والصفحة الرسمية للمديرية العامة للمناهج





مقدمة:

يُعد هذا الكتاب الأول في سلسلة كتب الرياضيات لطلبة الدراسة الإعدادية للفرع الأدبي وقد روعي في إعداده كثرة الأمثلة والتدرج معتمدين على ما لدى الطالب من حصيلة في مادة الرياضيات .

شمل هذا الكتاب خمسة فصول هي :

الفصل الأول : يتضمن مفهوم الدالة وتمثيلها وبعض التطبيقات العددية .

الفصل الثاني : يتضمن المعادلات والمتراجحات .

الفصل الثالث : يتضمن معلومات أولية في مبادئ حساب المثلثات .

الفصل الرابع : يتضمن مفاهيم أساسية في مجال الهندسة الإحداثية .

الفصل الخامس : يتضمن الإحصاء الوصفي الذي جاء امتداداً لما درسه الطالب في المرحلة المتوسطة .

في الختام نرجو من الله إن يوفقنا لما فيه الخير لبلدنا العراق العزيز ونأمل من زملائنا موافاتنا بملاحظاتهم بهدف التطوير والله الموفق ...

المؤلفون

الفصل الأول : الدوال الحقيقية

[1 - 1] مفهوم الدالة (مراجعة) .

[1 - 2] التعبير الرياضي للدالة .

[1 - 3] الدوال الحقيقية .

[1 - 4] التمثيل البياني للدوال .

[1 - 5] التغير .

أولاً- التغير الطردي .

ثانياً - التغير العكسي .

ثالثاً- التغير المشترك .

الفصل الأول : الدوال الحقيقية

[1-1] مفهوم الدالة Concept of the Function (مراجعة) :

درسنا في المرحلة السابقة الدالة وعرفناها بالتعريف الآتي :

تعريف (1 - 1):

يقال لعلاقة من مجموعة (A) الى مجموعة (B) انها دالة اذا كان كل عنصر من عناصر (A) يظهر كمسقط اول ،مرة واحدة فقط في احد الازواج المرتبة المحددة لبيان العلاقة .

لاحظ المخطط :

A B A B

بينما

ليست دالة

دالة

[1-2] التعبير الرياضي للدالة Mathematical Expression of the Function :

اذا كونت دالة من مجموعة (A) الى مجموعة (B) ورمزنا لها بالرمز (f) فاننا نكتب ذلك

بالصيغة الرمزية الآتية :

$f : A \longrightarrow B$ وتقرا (f دالة من A الى B)

حيث $\forall\ x \in A$ ، يوجد $y = f(x) \in B$ وحيد [أو $(x, y) \in f$] .



1. إذا كان الزوج المرتب Ordered Pair (x , y) ينتمي الى بيان الدالة f .

حيث f(x) =y

حيث (y) هو صورة Image العنصر x تحت تاثير الدالة f .

2. تتعين الدالة (f) اذا علمت ثلاث مكونات تميزها هي :

أ) المجال Domain : وتمثله المجموعة (A) وهي المجموعة التي ينتمي اليها المتغير (x)

اذا كان (x , y) ينتمي الى بيان الدالة f .

ب) المجال المقابل Codmain: وتمثله المجموعة (B) وهي المجموعة التي ينتمي اليها المتغير

(y) اذا كان (x , y) ينتمي الى بيان الدالة f .

جـ) قاعدة الدالة f : وهي العلاقة التي تربط عناصر (A) بعناصر (B) اي

. $y = f(x)$

3. تعطى قاعدة الدالة باحدى الطريقتين الآتيتين :

أ) ذكر بيان الدالة $f : A \longrightarrow B$ اي تكتب على شكل ازواج مرتبة .

$$f = \{ (x, y) : y = f(x), x \in A \}$$

ب) ذكر معادلة تربط المتغير (y) بالمتغير (x) .

[1-3] الدوال الحقيقية Real Functions :

تسمى الدالة $f: A \longrightarrow B$ دالة حقيقية اذا كان كل من مجالها (A) ومجالها المقابل (B) مجموعة جزئية غير خالية من مجموعة الاعداد الحقيقية Real Numbers(R) .

1) المجال المقابل $\subseteq R$.

2) المجال = $\{ x : x \in R , f(x) \in R \}$.

اوسع مجال للدالة (f) في (R) : وهو مجموعة الاعداد الحقيقية المنتمية الى (A) والتي يكون عندها $f(x) \in R$.



جد اوسع مجال للدالة : $f(x) = \sqrt{x}$.



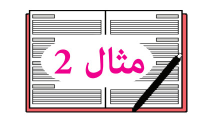
الحـل / مجال $f = \{ x : x \in R , \quad x \geq 0 \}$

تكون f(x) معرفة في R اذا كان $x \geq 0$

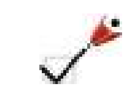
اي ان مجال $f = \{ x : x \in R , x \geq 0 \}$



عندما تعطى قاعدة دالة ويطلب تحديد مجالها ، فان المجال سيكون اوسع مجال ممكن في (R) .



اذا كانت $f(x) = x^2$ فعين مجال f.



الحــل / مجال $f = \{x : x \in R,\ f(x) = x^2 \in R\}$.

ولكن x^2 معرفة دوماً في R مهما كانت $x \in R$.

$\therefore$ مجال $f = R$

[يمكن ان نقول : اذا كانت $f(x)$ كثيرة الحدود فاوسع مجال للدالة f هو R] .



جد مجال الدالة التي قاعدتها $f(x) = \dfrac{x+2}{x-1}$

الحل / مجال $f = \{x : x \in R,\ f(x) = \dfrac{x+2}{x-1} \in R\}$.

ولكن $\dfrac{x+2}{x-1}$ معرفة في كل الاعداد الحقيقية باستثناء $x = 1$.

$\therefore$ مجال $f = R / \{1\}$.

[1-4] التمثيل البياني للدوال :

تعريف (2 - 1) :

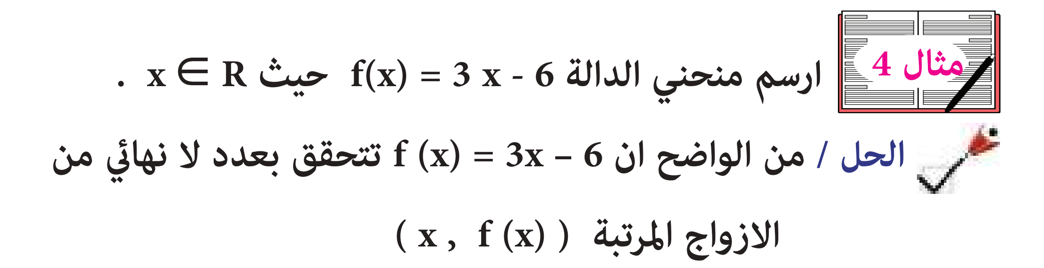
اذا كان $f : R \longrightarrow R$ دالة

يعرف منحني الدالة $y = f(x)$ على انه مجموعة النقط $(x, f(x))$

في المستوي الديكارتي Cartesian Plane .

اولاً : تمثيل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث

$f(x) = ax + c ,\ a , c \in R \quad a \neq 0$



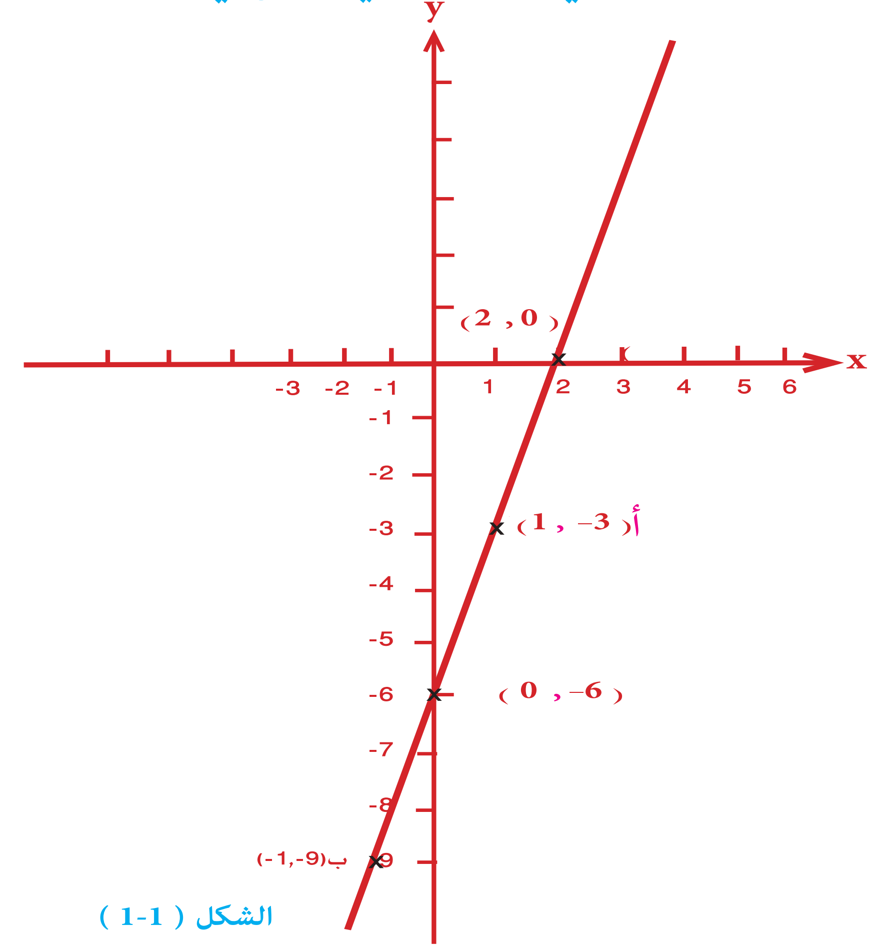
مثال 4 ارسم منحني الدالة $f(x) = 3x - 6$ حيث $x \in R$.

الحل / من الواضح ان $f(x) = 3x - 6$ تتحقق بعدد لا نهائي من الازواج المرتبة $(x , f(x))$

والجدول الآتي لبعض هذه الازواج :

x	0	1	2	−1	− 2	....
y	−6	−3	0	−9	−12	....

وقد رسمت هذه النقاط في المخطط البياني الموضح في الشكل (1-1)



الشكل (1-1)



لاحظ ان $y = 3x - 6$ هي معادلة مستقيم وعليه يمكن رسم منحني الـدالة

$f(x) = 3x - 6$ حيث $x \in R$ باي زوجين من الازواج المرتبة ونصل بينهما

بمستقيم واحد فقط وعلى ذلك فالزوجان المرتبان $(1, -3)$, $(-1, -9)$ ينتميان

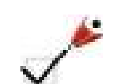
الى منحني الدالة وتعينان النقطتين م ، ب والمستقيم م ب هو المستقيم المطلوب .

ويلاحظ أيضاً انه من الممكن اخذ النقطتين $(0, -6)$, $(2, 0)$ او اي نقطتين اخريتين

عليه .ويفضل في اغلب الاحيان تعيين نقطتي تقاطع المستقيم مع المحورين الاحداثيين.



مثّل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f(x) = 1 - 2x$ بيانياً .



الحــل / ان التمثيل البياني لهذه الدالة هو مستقيم .

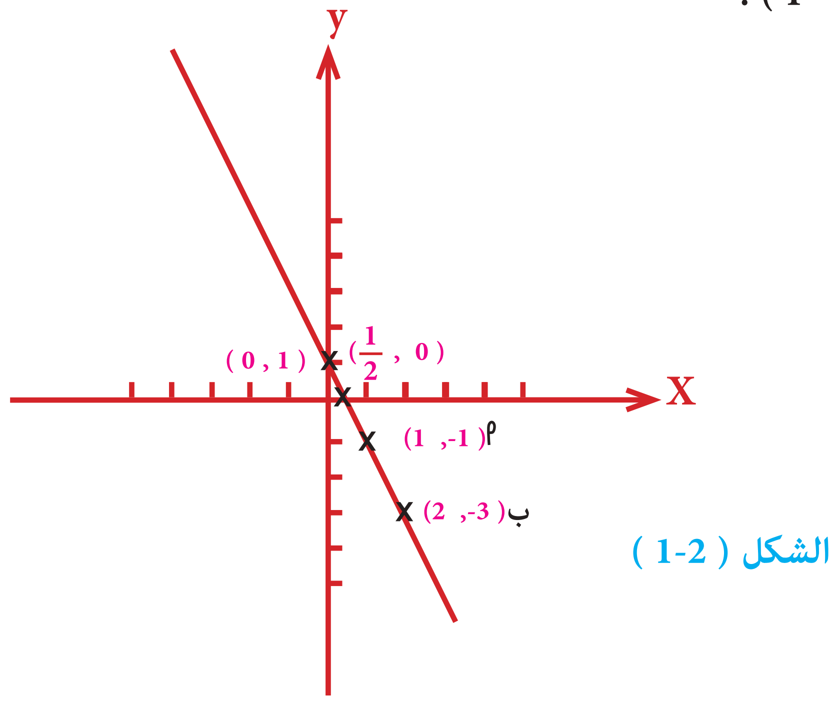
واذا أخذنا $x = 1$ فان $y = f(1) = -1$

واذا أخذنا $x = 2$ فان $y = f(2) = -3$

وعلى ذلك فالزوجان المرتبان م $(1, -1)$ ، ب $(2, -3)$ ينتميان الى بيان الدالة وتعينان

النقطتين م ، ب ويكون المستقيم م ب هو المستقيم المطلوب .

ويلاحظ انه كان من الممكن اخذ النقطتين (1 , 0) ، (0 , $\frac{1}{2}$) او نقطتين اخريتين . كما في الشكل (2 – 1) .



الشكل (2-1)

ثانياً : التمثيل البياني للدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f (x) = a x^2 + b$ حيث $a , b \in R$ وان $a \neq 0$ وهي تمثل منحنياً .



مثّل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $f (x) = x^2$ بيانياً .

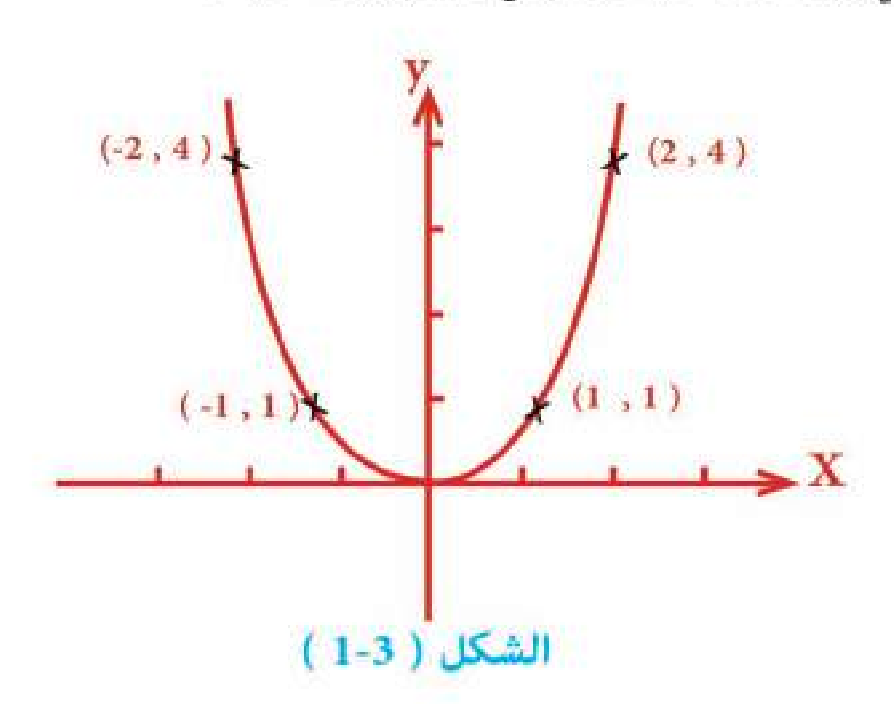
الحـل / ان مجال هذه الدالة هو مجموعة الاعداد الحقيقية .

وعلى ذلك فان التمثيل البياني لهذه الدالة يقع في النصف الاعلى فقط من المستوي الاحداثي .

x	....	–3	–2	–1	0	1	2	3	10	.....
y	....	9	4	1	0	1	4	9	10^2	.....

والجدول الآتي يعين لنا بعض نقط منحني هذه الدالة

ويمكن تعيين النقط الممثلة للازواج المرتبة الواردة في هذا الجدول وبعض النقاط التي تحقق احداثياتها المعادلة $y = x^2$ ثم صل بين هذه النقاط بمنحني يكون هذا المنحني هو التمثيل البياني لهذه الدالة كما هو موضح بالشكل (3 - 1) .



الشكل (3-1)

ويلاحظ ان هذا المنحني متناظر حول محور الصادات . بمعنى ان صورة كل نقطة

أ (x, y) تنتمي الى منحني الدالة تحت تاثير انعكاس في محور الصادات هي النقطة

أَ (- x , y) تنتمي الى منحني الدالة ايضاً . ان التمثيل البياني لمنحني الدالة $y = x^2$ يسمى (قطعاً مكافئاً parabola) .



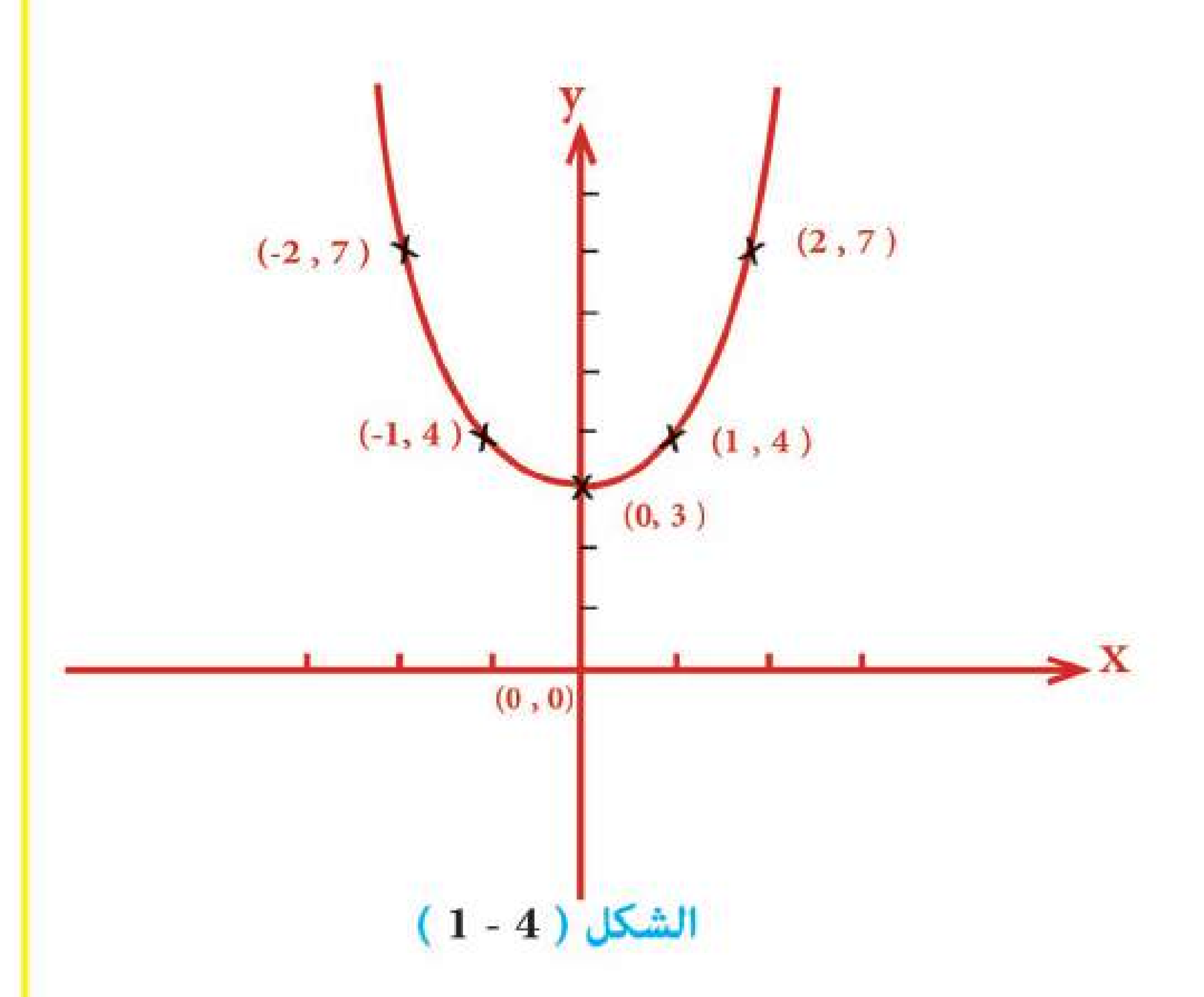
مثّل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $y = x^2 + 3$ بيانياً .

الحــل / $y = x^2 + 3$

ان المنحني الممثل لهذه الدالة يمكن ان ينتج عن المنحني الممثل للدالة $y = x^2$ بانسحاب ينقل كل نقطة الى الاعلى في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بمقدار 3 وحدات والجدول الآتي يعين لنا بعض نقط منحني هذه الدالة :

x	-2	-1	0	1	2	.....
y	7	4	3	4	7	.....

بتحديد النقاط الممثلة للأزواج المرتبة الناتجة ووصلها بمنحني ينتج لنا التمثيل البياني للمنحني كما في الشكل (4 - 1) .



الشكل (4 - 1)



مثّل الدالة $f : R \longrightarrow R$ بحيث $y = 1 - x^2$ بيانياً .



الحـل / $y = 1 - x^2$

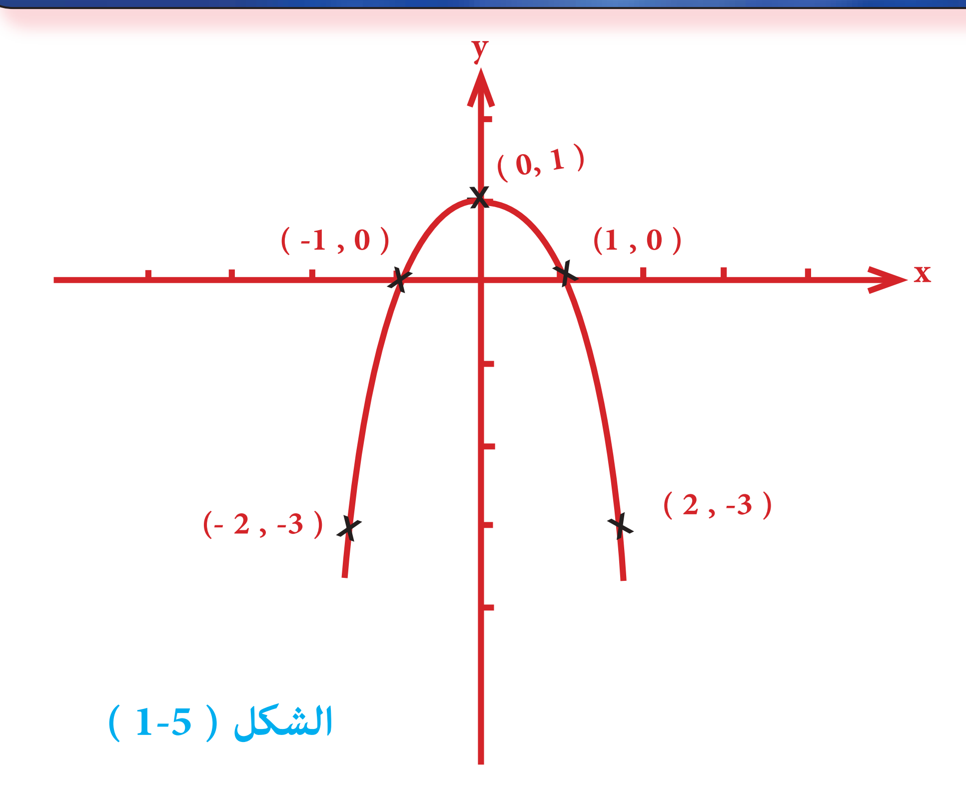
إن مجال هذه الدالة هو R وعلى ذلك فان التمثيل البياني لهذه الدالة يمكن أن ينتج عن

المنحني الممثل لدالة $y = - x^2$ قطع مكافئ رأسه في نقطة الاصل ومحدب وبانسحابه ينقل

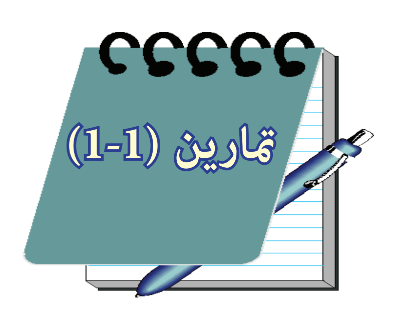
إلى الأعلى في الاتجاه الموجب لمحور الصادات بمقدار وحدة واحدة والجدول الآتي يعين لنا

بعض نقط منحني هذه الدالة :

x	–2	–1	0	1	2	.....
y	–3	0	1	0	–3	.....



الشكل (1-5)



1) ارسم منحنيات كل من الدوال الآتية :

أ) $f(x) = -4x + 3$

ب) $f(x) = -3$

جـ) $f(x) = 4 - x^2$

د) $f(x) = -2x^2$

هـ) $f(x) = x^2 - 4$

2) جد مجال كلٌ من الدوال الآتية :

أ) $f(x) = x^3 + x^2 - 3$

ب) $f(x) = \dfrac{2x + 6}{x^2 - x - 6}$

جـ) $f(x) = \sqrt{4 - x}$

د) $f(x) = \sqrt{x + 2}$

3) ليكن $R \longrightarrow R$ بحيث $f : R$ $f(x) = y = x + 1$

جد $f(-3)$, $f(2)$, $f[f(-1)]$, $f(1 + \Delta x)$, $f(a+2)$, $f(b-3)$.

[1-5] التغيير Variation :

عند استخدامنا للرياضيات كثيراً ما نجد زوجاً من المتغيرات يرتبط بعلاقة معنية. ففي بعض الاحيان تكون العلاقة بالصورة التي اذا حصل اي تغير على احد المتغيرين حصل هذا التغير بالنسبة نفسها في المتغير الآخر .

اولاً : التغير الطردي :

تعريف (3 -1) :

اذا كان y ، x متغيرين ، وان k عدداً ثابتاً موجباً (k عدد حقيقي موجب)

وكان $y = kx$ فاننا نقول : y تتغير طردياً تبعاً لـ (x) وتكتب

$$y \propto x$$

وتقرأ : y تتناسب طردياً Direct proportion مع x .

ويسمى x (المتغير المستقل) .

ويسمى y (المتغير التابع) .



اذا كان y يتغير طردياً تبعاً لـ (x) وكان $y = 15$ عندما يكون $x = 7$ فجد قيمة x عندما يكون $y = 30$.



$y \propto x$

$y = kx$ حيث ان k ثابت, $k \in R^+$

$$15 = k(7) \Rightarrow k = \frac{15}{7}$$

$\therefore\ y = \frac{15}{7}x$

$\therefore\ x = \frac{30 \times 7}{15} = 14$

من التعريف (1-3) نستنتج ما ياتي :

اذا كان $x \propto y$ واخذ المتغير x القيمتين x_1 ، x_2 وتبعاً لذلك اخذ y القيمتين y_1 ، y_2 على الترتيب فان :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2} \quad \text{او} \quad \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

مثال 10 y ، x متغيران حقيقيان مرتبطان بعلاقة ما فان اخذت x القيمتين 1.6 ، 5 وكانت قيمتا y المناظرتين لقيمتي x هما 4.8 ، 15 فهل العلاقة بين y ، x علاقة تغير طردي ؟

الحـل /

$\because\ x_1 = 1.6\ ,\quad x_2 = 5$

$y_1 = 4.8\ ,\quad y_2 = 15$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{4.8}{1.6} = 3$$

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$$

$\therefore$ العلاقة بين y ، x علاقة تغير طردي .

ملاحظة :

اما اذا كان $\frac{y_2}{x_2} \neq \frac{y_1}{x_1}$

فالعلاقة بين y ، x ليست علاقة تغير طردي .

ثانياً التغير العكسي :

تعريف (4 - 1) :

اذا كان x ، y متغيرين، وان k عدد ثابت (k عدد حقيقي موجب) وكان

$y = k.\frac{1}{x}$ فاننا نقول : y تتغير عكسياً تبعاً لـ (x) ونكتب

$y \propto \frac{1}{x}$ وتقرأ : y تتناسب عكسياً Inverse proportion مع x ،

ويسمى x (المتغير المستقل) ويسمى y (المتغير التابع) .



اذا كانت y تتغير عكسياً تبعاً لـ (x) وكانت x = 20 ، y = 3

فاوجد قيمة y عندما x = 6 .

الحـل /

$$y \propto \frac{1}{x}$$

$$\therefore\ y = \frac{k}{x} \quad , \quad k \in R^+$$

$$3 = \frac{k}{20} \Rightarrow k = 60$$

$$\therefore\ y = \frac{60}{x} = \frac{60}{6} = 10$$

من تعريف (4-1) نستنتج ماياتي :

اذا كان $y \propto \frac{1}{x}$ واخذ المتغير x القيمتين x_2 ، x_1 وتبعاً لذلك اخذ y القيمتين y_2 ، y_1 على الترتيب فان :

$$\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_2}{x_1} \quad \text{او} \quad \frac{y_1}{x_2} = \frac{y_2}{x_1}$$



y ، x متغيران حقيقيان مرتبطان بعلاقة ما فاذا اخذ المتغيران y ، x القيمتين 15 ، 21 على الترتيب وزادت قيمة المتغير x حتى اصبح 35 ونقص تبعاً لذلك المتغير y فاصبح 8 هل $y \propto \frac{1}{x}$ ؟


الحـل/

$$x_2 = 7 \quad , \quad x_1 = 3 \quad , \quad \frac{x_2}{x_1} = \frac{35}{15} = \frac{7}{3}$$

$$y_2 = 8 \quad , \quad y_1 = 21 \quad , \quad \frac{y_1}{y_2} = \frac{21}{8}$$

$$\because \quad \frac{x_2}{x_1} \neq \frac{y_1}{y_2}$$

$\therefore$ y لا تتغير عكسياً تبعاً لـ (x) .



اذا كانت $x \propto \frac{1}{y}$ ، $y \propto \frac{1}{z}$ فبرهن على ان $x \propto z$

البرهان /

$$x \propto \frac{1}{y} \Rightarrow x = \frac{k}{y} \quad , \quad k \in R^+$$

$$y \propto \frac{1}{z} \Rightarrow y = \frac{h}{z} \quad , \quad h \in R^+$$

$$\therefore \quad x = \frac{k}{y} = \frac{k}{\frac{h}{z}} = \frac{k}{h} z \quad , \quad \frac{k}{h} \in R^+$$

$$\therefore x \propto z$$

ثالثاً : التغير المشترك :

تعريف (5 - 1) :

اذا كانت x ، y ، z ثلاث متغيرات ، فاذا كان :

أ) x تتغير طردياً تبع y وعكسياً تبع z فنكتب $x \propto \frac{y}{z}$ ومنها

$x = k \frac{y}{z}$ ، $k \in R^+$.

ب) x تتغير طردياً تبع z ، y فنكتب $x \propto y\,z$ ومنها $x = k\,z\,y$

حيث ان (k ثابت) .

جـ) x تتغير عكسياً تبع z ، y فنكتب $x \propto \frac{1}{y\,z}$ ومنها $x = \frac{k}{y\,z}$

حيث ان (k ثابت) .



اذا كانت y تتغير طردياً تبع z ،x وكانت $y = 24$ عندما $x = 3$ ، $z = 4$ جد قيمة x عندما $z = 15$ ، $y = 30$.

الحــل /

$y \propto x\,z$

$y = k\,x\,z$ ، $k \in R^+$

$24 = k\,(3)(4)$

$\therefore k = 2$

$\therefore y = 2\,x\,z$

$30 = 2\,x(15) \Rightarrow x = 1$



اذا كان $b \propto a$ برهن على ان $a^2+b^2 \propto ab$.

الحل /

$\because \quad a \propto b$

$\therefore a = kb \quad , \quad k \in R^+$

ولا ثبات ان $a^2+b^2 \propto ab$ يجب ان نثبت ان $a^2+b^2 = ab(h)$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = h \ (\text{ثابت})$$

$$\frac{a^2+b^2}{ab} = \frac{k^2b^2+b^2}{kb \times b} = \frac{b^2(k^2+1)}{k \cdot b^2}$$

$$\frac{k^2+1}{k} = h \in R^+$$

$$\therefore a^2+b^2 \propto ab$$

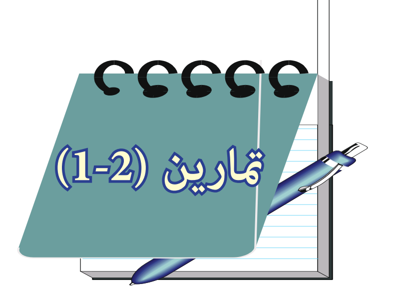


اذا كان y تتغير تغيراً عكسياً مشتركاً مع x ، z . فاذا كان y = 7 عندما z = 3 ، x= 1 جد ثابت التغير .

الحل /

$$y \propto \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{z} \Rightarrow y = k \cdot \frac{1}{xz} \ , \ k \in R^+$$

$$7 = k \cdot \frac{1}{(1)(3)} \Rightarrow k = 21$$



1) اذا كانت y تتغير طردياً مع x وكان $y = 10$ عندما $x = 5$ جد قيمة y عندما $x = 15$.

2) اذا كانت y يتغير عكسياً مع x وكان $x = 16$ عندما $y = 25$ جد قيمة y عندما $x = 20$.

3) اذا كان z يتغير تغيراً مشتركاً مع y ، x وكان $y = 4$ عندما $x = 1$ ، $z = 2$ جد ثابت التغير .

4) اذا كان y يتغير طردياً مع x وعكسياً مع L تغيراً مشتركاً فاذا كان $y = \frac{3}{2}$ عندما $L = 4$ ، $x = 2$ جد صيغة رياضية للعلاقة بين L ، x ، y .

5) أ) اذا كان $x \propto y$ فاثبت $y \propto x$.

ب) اذا كان $y \propto z$ ، $x \propto y$ فاثبت ان $x \propto z$.

6) اذا كان y ، x متغيرين حقيقيين مجموعة التعويض لكل منها R^+ وكان $y \propto x$ فاثبت ان $x^3 + y^3 \propto x^2 y$.

7) اذا تغيرت x عكسيا تبع $y - 1$ وكانت $x = 24$ عندما $y = 10$ فما قيمة x عندما $y = 5$ ؟

8) اذا كان y يتغير عكسياً تبع x . فاذا كان $y = 5$ وثابت التغير $= 15$. فجد قيمة x .

الفصل الثاني :
المعادلات والمتراجحات

[2-1] المعادلات .

[2-1-1]- تمهيد .

[2-1-2]- حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد

أولاً : التحليل .

ثانياً : الدستور .

[2-2] الفترات الحقيقية .

[2-3] القيمة المطلقة للعدد الحقيقي

[2-4] المتراجحة .

[2-4-1] - تمهيد .

[2-4-2] - حل المتراجحات من الدرجة الاولى

في متغير واحد تحتوي على مطلق .

[2-5] حل المعادلات الآنية من الدرجة الثانية في متغيرين.

- بالتعويض .
- بالحذف .

الفصل الثاني : المعادلات والمتراجحات في R

[2-1] المعادلات The Equations :

[2-1-1] تمهيد :

سبق ان درست في الفصل الاول معنى الدالة(function)وفي السنوات الماضية

إيجاد مجموعة حل المعادلة (equation)من الدرجة الاولى في متغير واحد وفي متغيرين

وكذلك مجموعة حلول المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد كما عرفت ان المعادلتين

المتكافئتين هما المعادلتان اللتان لهما مجموعة الحل نفسها ومجموعة التعويض نفسها

وقلنا في حينها انه اذا لم تذكر مجموعة التعويض للمعادلة فان مجموعة تعويضها R .

فالمعادلتان $x^2 - 1 = 0$ ، $x - 1 = 0$ ليستا متكافئتين .

أما المعادلتان $2x = 2$ ، $2x + 3 = 5$ متكافئتان .

والمعادلتان $x + 3 = 0$ ،حيث $x \in N$ ، $x + 3 = 0$ ،حيث $x \in Z$ ليستا متكافئتين

.... وهكذا .

ومما يجدر ذكره هو ان خواص التبديل والتجميع والاختزال التي تجري على معادلة ما

تؤدي الى معادلة مكافئة لها .

وقد نقوم بعملية معينة على معادلة ما ونحصل على معادلة تختلف مجموعة حلولها عن

المعادلة الاصلية .

فمثلاً اذا كان $x - 1 = 0$ فان $x = 1$ وان $x^2 = 1$ بتربيع الطرفين

$x^2 - 1 = 0$ باضافة النظير الجمعي للعدد (1) للطرفين .

$(x - 1)(x + 1) = 0$ (بالتحليل)

$x = 1$ أو $x = -1$

$\therefore$ مجموعة حلول المعادلة $x^2 - 1 = 0$ هي { 1 , 1- } .

وبسهولة نجد ان مجموعة الحلول للمعادلة الاصلية هي { 1 } وهما مجموعتان مختلفتان لذا ننصح الطالب ان يقوم بتحقيق الحل ومعرفة الجذور التي تنتمي الى مجموعة حلول المعادلة الأصلية اذا اجرى عمليات غير الخواص التي ذكرناها انفاً.

[2 - 1 - 2] حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد :

اولاً : التحليل Factoring

تعلمت ان معادلة الدرجة الثانية في متغير واحد هي معادلة من الشكل :

$ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$

يعتمد حل هذه المعادلة على ايجاد معادلة مكافئة لها من الشكل

$(mx - d)(nx - e) = 0$ ان امكن ذلك اي الى معادلة ناتجة عنها بوضعها بشكل حاصل ضرب كثيرتي الحدود من الدرجة الاولى و استناداً الى معلوماتنا بخواص مجموعة الاعداد الحقيقية يمكننا ان نكتب :

$$(mx - d)(nx - e) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} mx - d = 0 \\ \text{أو} \\ nx - e = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{matrix} x = \dfrac{d}{m} \\ \\ x = \dfrac{e}{n} \end{matrix}$$

ونقول ان مجموعة حل المعادلة من الدرجة الثانية المفروضة هي :

$$\left\{ \frac{d}{m} , \frac{e}{n} \right\}$$



حل المعادلة : $x^2 - 7x + 6 = 0$



الحــل / $(x-1)(x-6) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 6 = 0$

اما $x - 1 = 0$ أو $x - 6 = 0$

$x = 1$ أو $x = 6 \quad \therefore$

وتكون مجموعة حل المعادلة هي = $\{6, 1\}$.



جد مجموعة حل المعادلة $x^2 = 49$

الحــل / $(x-7)(x+7) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 49 = 0$



اما $x - 7 = 0$ أو $x + 7 = 0$

$x = 7$ أو $x = -7 \quad \therefore$

$\therefore$ مج = $\{-7, 7\}$

ثانياً : الدستور

الصيغة القياسية لمعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد هي :

$ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a \neq 0$

وباستخدام طريقة اكمال المربع (للاطلاع) . يمكن كتابة المعادلة :

$$a x^2 + b x + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} \right) = 0 \quad .....①$$

ولو اضفنا وطرحنا المقدار $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ الى الطرف الايسر للمعادلة ①

ينتج

$$a\left[\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]+\left[\frac{c}{a}-\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]\right]=0$$

$$a\left[x+\frac{b}{2a}\right]^2+\left[\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]=0 \quad , \quad a\neq 0$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$

بجذر الطرفين ينتج

$$x+\frac{b}{2a}=\mp\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

يسمى المقدار $b^2 - 4ac$ بالمقدار المميز ويمكن بواسطته معرفة نوع الجذران دون الحاجة الى حل المعادلة ويكون حل المعادلة $a x^2 + b x + c = 0$ بالدستور هو :

$$\left\{\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} , \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right\}$$



حل المعادلة $2x^2 - 3x = 1$ بطريقة الدستور .

الحل / $2x^2 - 3x - 1 = 0 \Rightarrow a = 2 ، b = -3 ، c = -1$

المميز $= b^2 - 4ac \Rightarrow 9 - 4(2)(-1) = 17 \in R$

$\therefore$ يمكن تطبيق الدستور لان قيمة المميز اكبر من 0 :

$$x=\frac{-b\mp\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \Rightarrow x=\frac{3\mp\sqrt{17}}{4}$$

$\therefore$ مج = $\left\{\frac{3+\sqrt{17}}{4} , \frac{3-\sqrt{17}}{4}\right\}$



حل المعادلة $4x^2 - 4x + 1 = 0$ باستخدام الدستور .

الحـل / $4x^2 - 4x + 1 = 0 \Longrightarrow a = 4 , b = -4 , c = 1$

المميز $= b^2 - 4ac$

$= (-4)^2 - 4(4)(1)$

$= 16 - 16$

$= 0$

∴ يمكن تطبيق الدستور

$$x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Longrightarrow x = \frac{-(-4)}{2(4)}$$

$$x = \frac{1}{2}$$

الجذران متساويان ∴ مج = $\{\frac{1}{2}\}$.



اذا كانت قيمة المميز $b^2 - 4ac = 0$ فان جذرا المعادلة

$ax^2 + bx + c = 0$ متساويان فان :

مج = $\{\frac{-b}{2a}\}$



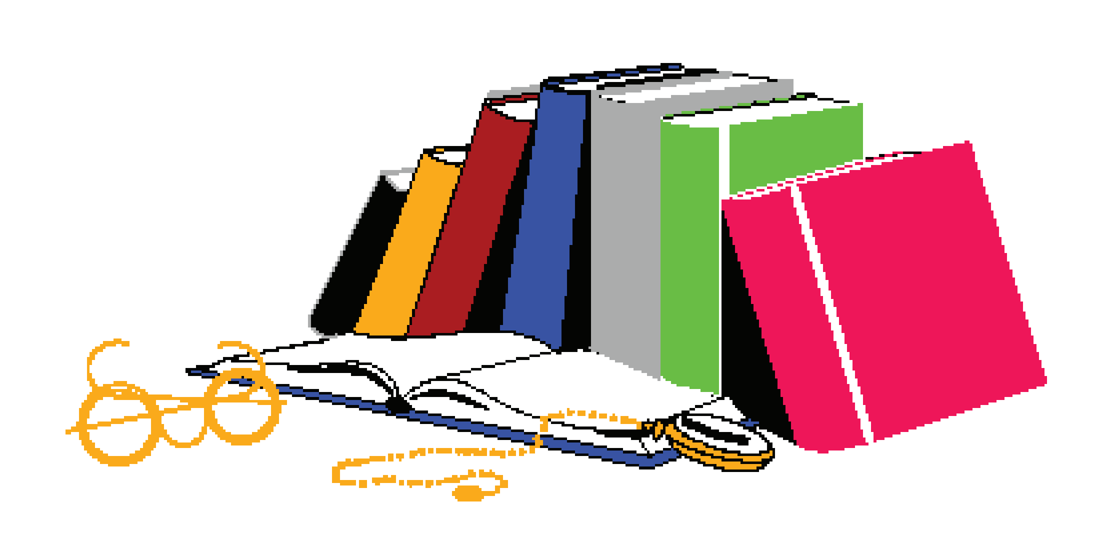
اذا كانت قيمة المميز $b^2 - 4ac$ اصغر من صفر فلا يوجد حل للمعادلة في مجموعة الاعداد الحقيقية R . أما إذا كانت قيمته أكبر من او يساوي صفر فأن الحل ينتمي الى R .

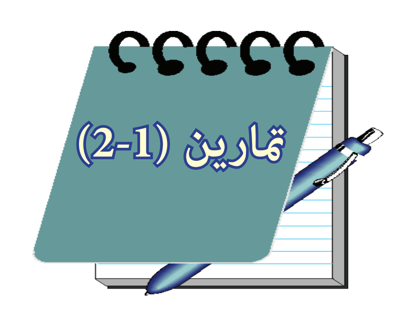
مثلا : المعادلة : $x^2 - 2x + 5 = 0$ ليس لها حل في R

لان $b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(1)(5)$

$= 4 - 20$

$= -16 < 0$





1) جد مجموعة حلول المعادلات الآتية مستخدماً طريقة التحليل :

أ) $6x^2 + 7x - 3 = 0$

ب) $2x^2 + 3x - 9 = 0$

جـ) $x^2 + 12 = 7x$

د) $x > 0$ ، $x - \sqrt{x} - 12 = 0$ (حقق صحة الحل)

هـ) $x^6 + 7x^3 = 8$

2) بين نوع جذري المعادلات الآتية ثم جد مجموعة حلول المعادلات الآتية مستخدماً القانون (الدستور).

أ) $3x^2 - 7x + 2 = 0$

ب) $3x^2 - 7x + 4 = 0$

جـ) $4x^2 + 9 = 12x$

د) $x^2 - 4x + 5 = 0$

[2 - 2] الفترات الحقيقية Real Intervals :

1 – تسمى مجموعة الاعداد :

$\{x : x \in R ، a \leq x \leq b\}$ الفترة المغلقة (closed Interval) من a الى b حيث

$a < b$ ونرمز لها بالرمز $[a , b]$ وتمثل على خط الاعداد كما في الشكل (1 - 2) حيث رمزنا

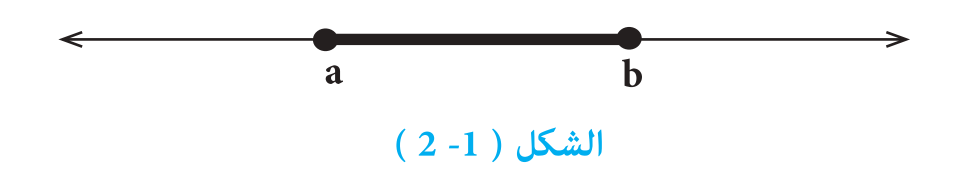
لنقطة البداية للقطعة المستقيمة التي تمثل الفترة المغلقة باحداثيها a ولنقطة النهاية لهذه

القطعة باحداثيها b لقد اهملنا في هذا الشكل ذكر نقطة الاصل (o)

يلاحظ وجود تقابل بين مجموعة الاعداد الحقيقية المنتمية الى الفترة $[a , b]$ ومجموعة

نقاط القطعة المستقيمة ab .

حيث $a \in [a , b] , b \in [a , b]$.

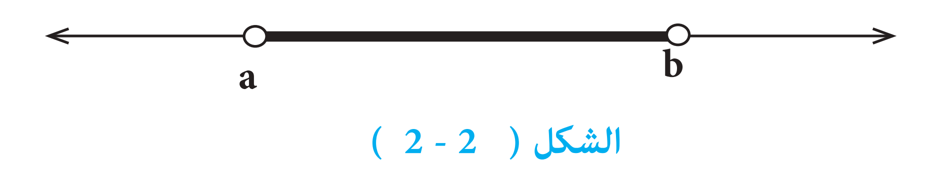


الشكل (1- 2)

2 - نسمي المجموعة : $(a , b) = \{x : x \in R ، a < x < b\}$ الفترة المفتوحة

(Open Interval) من a الى b حيث $a < b$ وتمثل على الخط الاعداد الحقيقية كما في

الشكل (2-2) .



الشكل (2 - 2)

ويلاحظ في هذه الحالة ان $b \notin (a , b)$, $a \notin (a , b)$ والدائرتان حول العددين a , b في

الشكل تدلان على ذلك .

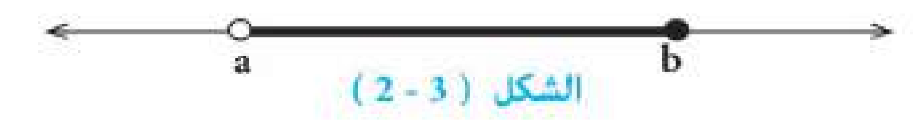
3-نسمي كلا من المجموعتين :

$\{x : x \in R \,،\, a < x \leq b\} = (a , b]$

$\{x : x \in R \,،\, a \leq x < b\} = [a , b)$

الفترة نصف مغلقة (Half - closed Interval) او نصف مفتوحة

(Half - open Intetval) حيث $a < b$ وتمثل المجموعة الاولى كما في الشكل (3 – 2)



الشكل (3 - 2)

حيث $b \in (a , b]$, $a \notin (a , b]$ وتمثل المجموعة الثانية كما في الشكل

(4 - 2) حيث $a \in [a , b)$, $b \notin [a , b)$



الشكل (4 - 2)

4 - مجموعة الاعداد الحقيقية التي تزيد على العدد الحقيقي a او تساويه هي :

$\{x : x \in R \,،\, x \geq a\}$ ونمثلها كما في الشكل (5 – 2)

a

الشكل (5 - 2)

كما ان المجموعة = $\{x : x \in R \,،\, x > a\}$ تدل على مجموعة الاعداد الحقيقية التي تكبر

العدد الحقيقي a ونمثلها كما في الشكل (6-2) :

a

الشكل (6-2)

5 - المجموعة = $\{x : x \in R ، x \leq a\}$ تدل على مجموعة الأعداد الحقيقية التي تساوي العدد الحقيقي a وتصغره ونمثلها كما في الشكل (7 – 2)



الشكل (7 - 2)

والمجموعة = $\{x : x \in R ، x < a\}$ تدل على مجموعة الاعداد الحقيقية التي هي اقل من العدد الحقيقي a ونمثلها كما في الشكل (8 – 2)



الشكل (8 - 2)



جد (أ) $[1,6] \cap [3,8]$

(ب) $[1,6] - [3,8]$



$\therefore [1,6] \cap [3,8] = [3,6]$ ، $[3,8] - [1,6] = [6,8)$

الشكل (9 - 2)



جد $\{x : x > -3\} \cup [-5,2)$

$\{x : x > -3\} \cup [-5,2) = \{x : x \geq -5\}$

2 – 3] القيمة المطلقة للعدد الحقيقي
Absolute Value of Real Number :

تعريف (2-1) :

$\forall x \in R$ ، نعرف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي x التي نرمز لها بالرمز $|x|$

كما يأتي :

$$|x| = \begin{cases} x & , x > 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$



$|5| = 5$, $|-5| = 5$, $|-2\sqrt{3}| = 2\sqrt{3}$

$|7-\sqrt{2}| = 7-\sqrt{2}$ ، $7 > \sqrt{2}$ ، $\left|\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

$|\sqrt{5}-6| = 6-\sqrt{5}$ ، $6 > \sqrt{5}$.

مثال 7 : عبر باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي عن كل مما يأتي :

1) $|7|$

2) $|x-3|$



الحل : 1) $|7| = 7$

2)

$$|x-3| = \begin{cases} (x-3) & , x-3 > 0 \\ 0 & , x-3 = 0 \\ -(x-3) & , x-3 < 0 \end{cases}$$

$$|x-3| = \begin{cases} x-3 , & x > 3 \\ 0 , & x = 3 \\ 3-x , & x < 3 \end{cases}$$

نستنتج من التعريف (1 – 2) ان القيمة المطلقة تتمتع بالخواص الآتية :

1) $\forall \ x \in R , | x | \geq 0$

مثلاً $-5 \in R , | -5 | = 5 > 0$

$0 \in R , | 0 | = 0$

2) $\forall x \in R , \quad | -x | = | x |$

مثلاً $9 = | -9 | = | 9 |$

3) $\forall \ x \in R , -| x | \leq x \leq | x |$

مثلا $| 6 | = 6 > -| 6 |$

4) $\forall \ x \in R , \ x^2 = | x |^2$

مثلاً $(-3)^2 = | -3 |^2$

$9 = (3)^2 = 9$

5) $\forall x ، y \in R , | x \cdot y | = | x | \cdot | y |$

$x = 3 ، y = -5$

$| 3 (-5) | = | 3 | \cdot | -5 |$

$| -15 | = (3) (5)$

$15 = 15$

6) $-a \le x \le a$ فان $|x| \le a$ اذا كان $a > 0$ حيث

$-7 \le x \le 7$ فان $|x| \le 7$ اذا كان

7) $\forall x ، y \in R$ فان $|x + y| \le |x| + |y|$

مثلا أ) $x = 3 ، y = 5$

$|3 + 5| = |3| + |5|$

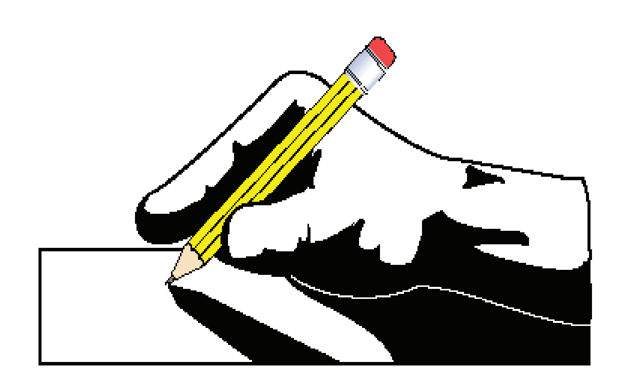
$8 = 8$

ب) $x = 3 ، y = -5$

$|3 + (-5)| < |3| + |-5|$

$|-2| < 3 + 5$

$2 < 8$





1) اكتب خمسة عناصر في كل من الفترات

$(-10, -6]$ ، $(-1, 1]$ ، $(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ ، $[0, 1]$ ، $[1, 2)$ ، $(3, 4]$ ، $(5, 7)$

2) باستخدام تعريف القيمة المطلقة للعدد الحقيقي جد ما يأتي :

$|-3|$ ، $|\frac{3}{7}|$ ، $|-\sqrt{2}|$ ، $|\sqrt{3} - 5|$ ، $|2 - \sqrt{5}|$

3) لتكن $A = [-3, 1]$, $B = [-1, 2]$

أ) مثل على خط الاعداد كلا من $A - B$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$

ب) اكتب كلاً من $A - B$ ، $A \cap B$ ، $A \cup B$ على شكل فترات حقيقية

4) جد كلا مما يأتي :

أ) $\{x : x \geq -1\} \cap [-3, 2)$

ب) $(-3, 1] \cap \{x : x > 2\}$

جـ) $(-2, 3] \cup \{x : x < 1\}$

د) $[-3, 0] - (-2, 3)$

[2 - 4] المتراجحات Inequalities :

[1 – 4 – 2] تمهيد :

ان المتراجحة Inequality التي تحوي متغيراً x والتي تكتب بالشكل : $f(x) < g(x)$

حيث $g(x)$ ، $f(x)$ تعبيران مفتوحان تسمى متراجحة في متغير واحد x .

وكما تعلم من دراستك السابقة ، انه اذا عيّنا مجموعة من القيم التي اذا اعطيت لـ x في

هذه المتراجحة وجعلها عبارة صائبة نقول اوجدنا مجموعة حل هذه المتراجحة وتعرف

المتراجحات المتكافئة كما عرفت المعادلات المتكافئة .

تعريف (2-2) :

نقول عن المتراجحة $f(x) < g(x)$ متراجحة مكافئة $h(x) < s(x)$

اذا كان لهما مجموعة الحل نفسها .

سنهتم في هذا البند بحل المتراجحات التي يكون فيها كل من $g(x)$ ، $f(x)$ كثيرة الحدود .

وقد درست في الصف الثالث المتوسط حل المتراجحات من الدرجة الاولى في متغير واحد

وقد استخدمنا خواص الحذف للانتقال من المتراجحة المفروضة الى متراجحات مكافئة لها

على التعاقب حتى نصل الى متراجحة من الشكل : $x < a$ او $x > b$ ونقول عندها اننا حللنا

المتراجحة .



جد مجموعة الحل للمتراجحة : $3x + 1 < x + 5$ اذا كانت مجموعة التعويض هي R ومثل مجموعة الحل على خط الاعداد .



الحـــل / $3x + 1 < x + 5$

$$(3x + 1) + (-x) < (x + 5) + (-x)$$

$$2x + 1 < 5$$

$$(2x + 1) + (-1) < 5 + (-1)$$

$$2x < 4$$

$$\frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(4)$$

$$x < 2$$

مجموعة الحل = $\{x : x \in R، x < 2\}$

[2 - 4 - 2] حل المتراجحات من الدرجة الاولى في متغير واحد تحتوي على مطلق:



اذا كان R هو مجموعة التعويض جد مجموعة الحل للمتراجحة $|x - 2| > 5$

الحــل /

$$|x - 2| = \begin{cases} (x - 2), & x \geq 2 \\ (2 - x), & x < 2 \end{cases}$$

$|x - 2| > 5 \Rightarrow x - 2 > 5$ أو $2 - x > 5$

$x > 7$ أو $x < -3$

وبحل هذا النظام نجد ان مجموعة الحل المطلوبة هي :

$ف_1 \cup ف_2 = \{x : x \in R ، x < -3\} \cup \{x : x \in R ، x > 7\}$

-3 ف$_2$ 7 ف$_1$

[2-5] حل المعادلات الآنية من الدرجة الثانية في متغيرين :

ويكون الحل بالتعويض substitution أو بالحذف Elimination .

اذا اشتملت احدى المعادلتين ذات المتغيرين على حد من الدرجة الثانية على الاقل او اشتملت على حاصل ضرب متغيرين فان هذه المعادلة تسمى معادلة من الدرجة الثانية في متغيرين .



اذا كانت مجموعة التعويض لكل من x ، y هي R .

$x = \{0, 1, 2, 3\}$ جد مجموعة الحل للنظام

$x - y = 1$ ....①

$x^2 + y = 11$ ....②



الحــل / مجموعة الحل للمعادلة ①هي :

ف$_1$ = $\{(3, 2), (2, 1), (1, 0), (0, -1)\}$

مجموعة الحل للمعادلة ②هي :

ف$_2$ = $\{(3, 2), (2, 7), (1, 10), (0, 11)\}$

فتكون مجموعة الحل للنظام هي :

ف = ف$_1$ $\cap$ ف$_2$ = $\{(3, 2)\}$



اذا كانت مجموعة التعويض لكل من x ، y هي R جد مجموعة الحل للنظام المذكور سابقاً.

الحــل / نتبع الطريقة الجبرية : من ①: $x = y + 1$ ...... ③

نعوض③ في② ينتج :

$$(y + 1)^2 + y = 11 \Rightarrow y^2 + 3y - 10 = 0$$

التعويض في $(y+5)(y-2)=0 \Leftrightarrow y=-5$ .....③

$\therefore x=-4$ ويكون $ف_1 = \{(-4, -5)\}$

أو $y=2$ بالتعويض في ③

$\therefore x=3$ ويكون $ف_2 = \{(3, 2)\}$

مجموعة الحل $ف_1 \cup ف_2 = \{(-4, -5), (3, 2)\}$



لنفرض مجموعة التعويض لكل من x ، y هي R جد مجموعة الحل

للنظام $x^2+y^2=25$ ....①

$x^2+y^2+2x+2y=39$ ....②

الحـل / بطرح ① من ② ينتج : $x+y=7 \Leftrightarrow 2x+2y=14$

$\therefore \quad x=7-y$ ....③

بتعويض ③ في ① :

$(7-y)^2+y^2=25 \Leftrightarrow 2y^2-14y+24=0$

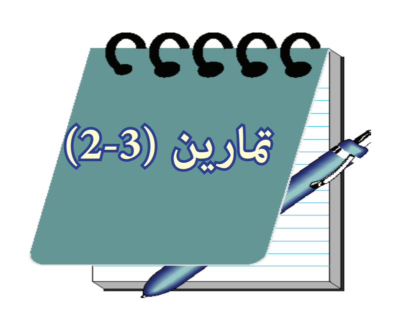
$\Leftrightarrow y^2-7y+12=0$

$(y-3)(y-4)=0$

اما $y=3$ بالتعويض في ③ $x=4 \quad \therefore \Leftarrow ف_1 = \{(4, 3)\}$

او $y=4$ بالتعويض في ③ $x=3 \quad \therefore \Leftarrow ف_2 = \{(3, 4)\}$

$\therefore$ مجموعة الحل $ف_1 \cup ف_2 = \{(3, 4) ، (4, 3)\}$



1) جد مجموعة حل المتراجحات :

أ) $2x + 5 < 7$

ب) $x - 3 \geq 6\ 3$

2) جد مجموعة حلول المتراجحات الاتية :

أ) $|x - 6| \leq 1$

ب) $|x + 1| \leq 4$

جـ) $2 - |2x - 3| \leq -3$

د) $|4x + 1| \geq 15$

3) باختيار مجموعة التعويض لكل من x ، y هي R جد مجموعة الحل لكل من الأنظمة الآتية :

أ)

$x + y = 1$ .... ①

$x^2 + 3y^2 = 7$ .... ②

ب)

$x y = 12$ .... ①

$x^2 - y^2 = 32$ .... ②

جـ)

$x + y = 2$ .... ①

$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5$ .... ②

د)

$x^2 + y^2 = 17$ .... ①

$x^2 + y^2 + 2x = 19$ .... ②

الفصل الثالث : حساب المثلثات

[3-1] الزاوية .

[3-2] التقدير الدائري لقياس الزوايا .

[3-3] العلاقة بين التقديرين الستيني والدائري لقياس الزوايا .

[3-4] النسب المثلثية لزاوية حادة .

[3-5] بعض العلاقات الأساسية في حساب المثلثات .

[3-6] النسب المثلثية للزوايا الخاصة .

[3-7] دائرة الوحدة والنقطة المثلثية لزاوية .

[3-8] ايجاد النسب المثلثية للزوايا ($180^\circ - \theta$)

حيث $\theta \in [0, 90^\circ)$

[3-9] زوايا الإرتفاع والإنخفاض .

[3 - 1] الزاويـــة Angle

سبق أن تعرف الطالب على مفهوم الزاوية من خلال دراسة للأشكال الهندسية ويتذكر أن

الزاوية تتكون من شعاعين مشتركين في نقطة بدئهما .

فالشعاعان $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BA}$ في الشكل (1-3) مشتركان في نقطة البدء (B) ويكونان الزاوية

$A\hat{B}C$

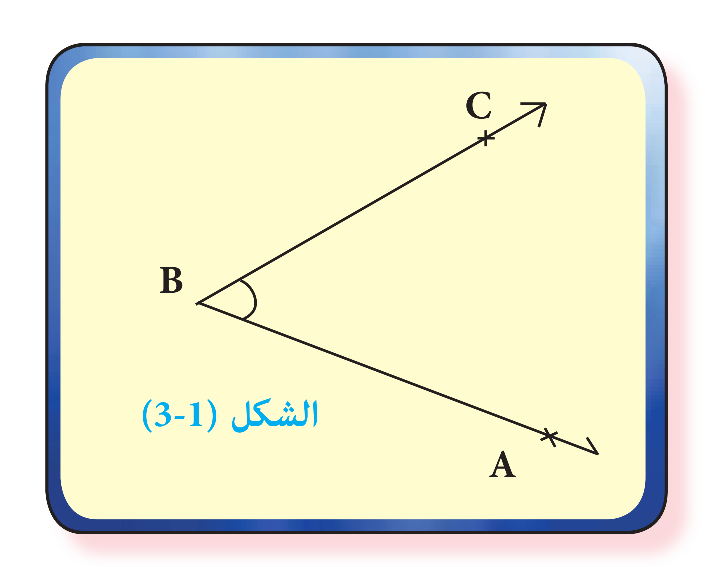
التي نرمز لها $A\hat{B}C$ أو $\measuredangle ABC$

لاحظ أن $A\hat{B}C = C\hat{B}A$

يسمى الشعاعان $\overrightarrow{BC}$ ، $\overrightarrow{BA}$

(ضلعي الزاوية) ويسمى بدء

الشعاعين المشترك B (رأس الزاوية)



الشكل (1-3)

[2-3] التقدير الدائري لقياس الزوايا :

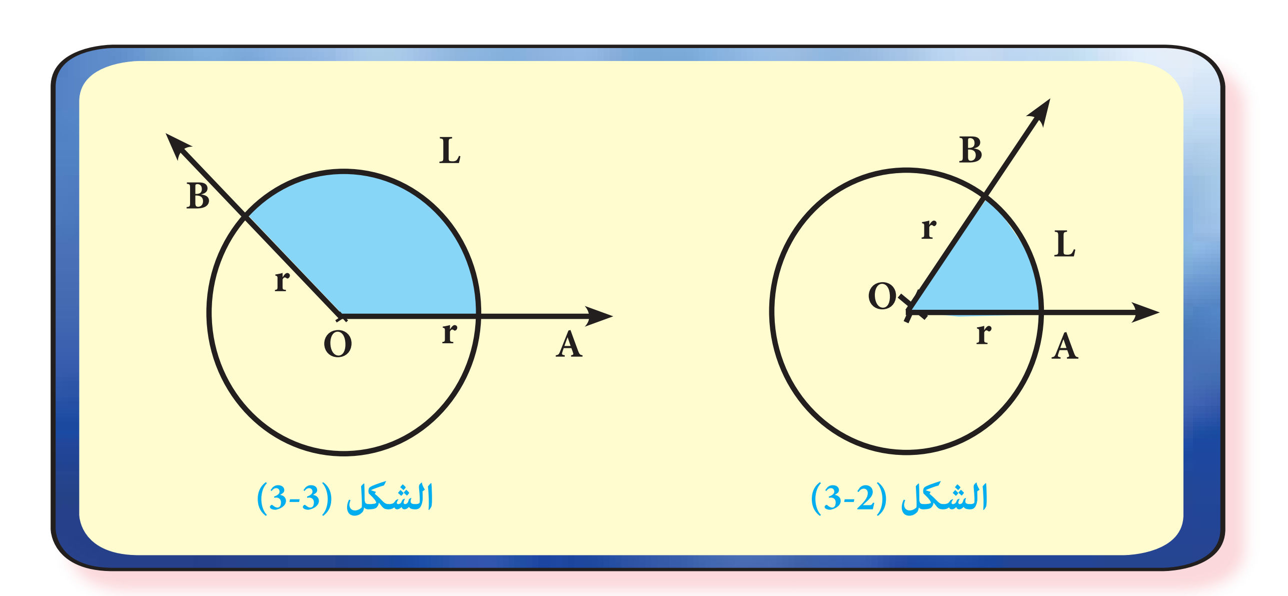
يوجد نظام لقياس الزوايا يسمى «التقدير الدائري» Radian Measure وتسمى وحدة

القياس فيه الزاوية نصف القطرية ويمكن تعريفها كما يأتي :

تعريف (3-1) :

الزاوية نصف القطرية وهي قياس للزاوية التي إذا وضع رأسها في مركز دائرة وقابلها قوس طوله مساوٍ لنصف قطر تلك الدائرة .

ففي الشكل(3-2) إذا فرضنا أن طول القوس المقابل للزاوية المركزية AO B يساوي (L) وحدة طول ، نصف قطر الدائرة =(r) وحدة طول وكان L=r فإن $m \sphericalangle AOB$ بالتقدير الدائري =1 زاوية نصف قطرية وإذا كان $L = 2r$ كما في الشكل (3-3) فإن $m \sphericalangle AOB$ بالتقدير الدائري = زاويتين نصف قطريتين .



الشكل (3-3) الشكل (3-2)

∴ قياس الزاوية المركزية مقدراً بالتقدير الدائري = $\frac{\text{طول القوس المقابل لها}}{\text{نصف قطر الدائرة}}$

$$\theta = \frac{L}{r}$$

[3-3] العلاقة بين التقديرين الستيني والدائري لقياس الزوايا :

وكما نعلم في المرحلة المتوسطة فإنه :

إذا قسمنا دائرة إلى 360 قسماً متساوياً فإننا نحصل على 360 قوساً متساوياً ، كل قوس

منها يقابل زاوية مركزية في هذه الدائرة قياسها يسمى درجة في القياس الستيني

Degree Measure ويرمز لهُ (1°) ، كما إن :

1° = 60 دقيقة = $60'$

$1'$ = 60 ثانية = $60''$

ذكرنا سابقاً أن محيط الدائرة = $2\pi\ r$

وبما أن $\dfrac{2\pi\ r}{r} = \dfrac{L}{r} = \theta$

$\therefore$ 2π زاوية نصف قطرية = 360°

$\Leftarrow$ π زاوية نصف قطرية = 180°

$\therefore$ 1 زاوية نصف قطرية = $\dfrac{180^{\circ}}{\pi}$

$\therefore$ $1^{\circ} = \dfrac{\pi}{180^{\circ}}$ زاوية نصف قطرية =1745 .0 .0 زاوية نصف قطرية .

وبصورة عامة :

$\dfrac{\pi}{180^{\circ}} = \dfrac{\theta}{D^{\circ}}$ تستخدم العلاقة اعلاه لتحويل قياس الزاوية من التقدير الدائري

إلى الستيني وبالعكس حيث يكون D قياس الزاوية بالنظام الستيني θ قياس الزاوية

بالنظام الدائري .



حَول

أ) 40° إلى التقدير الدائري

ب) 75° إلى التقدير الدائري

جـ) 2.6π إلى التقدير الستيني

د) $\frac{1}{4}\pi$ إلى التقدير الستيني

الحـــل /

أ) $$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\Theta}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\Theta}{40^\circ} \Rightarrow \Theta = \frac{2\pi}{9}$$

من الزوايا النصف قطرية .

ب) $$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\Theta}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\Theta}{75^\circ} \Rightarrow \Theta = \frac{5\pi}{12}$$

من الزوايا النصف قطرية

جـ) $$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\Theta}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{2.6\pi}{D^\circ} \Rightarrow D = 180^\circ \times 2.6 = 468^\circ$$

د) $$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\Theta}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{1}{4}\pi}{D^\circ} \Rightarrow D^\circ = 180^\circ \times \frac{1}{4} = 45^\circ$$



زاوية مركزية قياسها 60° فما طول القوس الذي تقابله إذا كان طول نصف قطر دائرتها 9 سم ؟

الحـــل /

من الزوايا النصف قطرية $$\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\Theta}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\Theta}{60^\circ} \Rightarrow \Theta = \frac{\pi}{3}$$

∵ قياس الزاوية بالتقدير الدائري = $\frac{L}{r}$

$$\frac{L}{r} = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \frac{L}{9} = \frac{\pi}{3}$$

سم طول القوس $L = 3\pi = 3 \times 3.142 = 9.426$



زاوية مركزية طول قوسها 22cm وطول نصف قطر دائرتها 20cm

فما مقدار قياسها الستيني ؟

الحـل / قياس الزاوية المركزية بالدائري = $\frac{L}{r}$

= $\frac{22}{20}$ زاوية نصف قطرية

$$\because \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\ominus}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\frac{22}{20}}{D^\circ}$$

القياس بالتقدير الستيني $\therefore D^\circ = \frac{22}{20} \times \frac{180^\circ}{\pi} = 63^\circ$



طول القوس المقابل لزاوية مركزية مقدارها 35° يساوي 5cm فما نصف

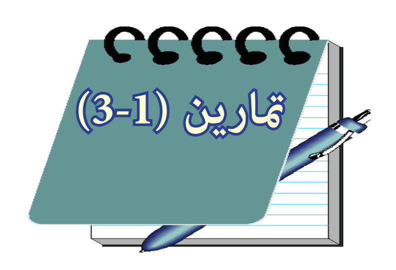
قطر دائرته ؟



زوايا نصف قطرية $\frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\ominus}{D^\circ} \Rightarrow \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\ominus}{35^\circ} \Rightarrow \ominus = \frac{35\pi}{180^\circ}$

$$\because \ominus = \frac{L}{r} \Rightarrow \frac{35\pi}{180^\circ} = \frac{5}{r}$$

طول نصف القطر $\therefore r = \frac{180 \times 5}{35\pi} = 8.18 \text{ cm}$



1) حول الى التقدير الدائري كل من قياس الزوايا الآتية

30° ، 120° ، 15° ، 300°

2) حول كلا من الزوايا النصف قطرية الآتية الى التقدير الستيني

$\frac{3\pi}{5}$ ، $\frac{5\pi}{6}$ ، $\frac{\pi}{3}$ ، $\frac{1}{3}$

(3) قياس زاوية مركزية في دائرة $\frac{5}{6}$ من الزوايا النصف قطرية تقابل

قوسا طوله 25 سم جد نصف قطر تلك الدائرة .   ج / 30 سم

4) ما طول القوس المقابل لزاوية مركزية قياسها 135° في دائرة نصف قطرها

8cm؟   ج/ 18.84cm

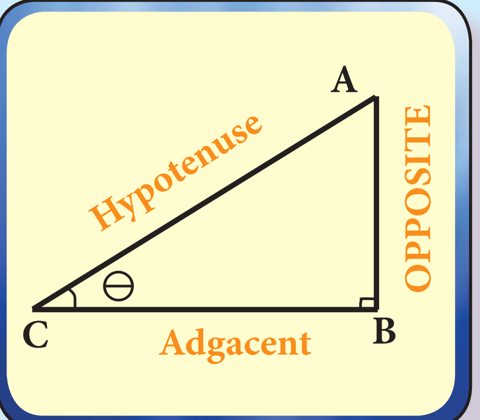
5) زاوية مركزية طول قوسها 9.42 سم وطول نصف قطر دائرتها 6 سم .

فما مقدارها بالتقدير الستيني ؟ $(\pi = 3.14)$

ج / 90°

[3-4] النسب المثلثية لزاوية حادة :

تعريف (3-2) :



Δ A B C القائم الزاوية في B :

جيب (Sine) الزاوية الحادة (⊖) وتكتب

$$\text{Sin}\ \ominus = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{AB}{AC}$$

جيب تمام (Cosine) الزاوية الحادة (⊖) ويرمز له Cos وتكتب

الشكل (3-4)

$$\text{Cos}\ominus = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{BC}{AC}$$

ظل (Tangent) الزاوية الحادة (⊖) وتكتب

$$\tan\ominus = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{AB}{BC}$$



من النسب المثلثية لزاوية حادة

$\sin\ominus , \cos\ominus \in [-1 , 1]$

$\sin 0 = 0 , \sin 90^\circ = 1$

$\cos 0 = 1 , \cos 90^\circ = 0$

$\tan 0 = 0 , \tan 90^\circ$ غير معرفة

[3-5] بعض العلاقات الأساسية في حساب المثلثات :

الشكل (3-4) يمثل مثلثاً قائم الزاوية في B والزاوية الحادة ⊖ :

بتطبيق مبرهنة فيثاغورس على المثلث A B C نجد أن :

$(AB)^2 + (BC)^2 = (AC)^2$ بقسمة كل الحدود على $(AC)^2$

$$\left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}\right)^2 + \left(\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2\ominus + \cos^2\ominus = 1$$

كذلك $\tan\ominus = \frac{AB}{BC}$ بالقسمة على (AC) ينتج

$$\therefore \tan\ominus = \frac{\sin\ominus}{\cos\ominus}$$

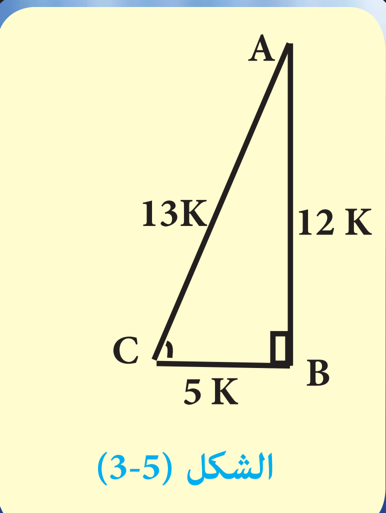


اذا علمت أن $\cos C = \frac{5}{13}$ في المثلث ABC القائم الزاوية في B جد . $\cos A$ ، $\sin A$ ، $\tan C$



الحـل/ نرسم المثلث A B C القائم الزاوية في B

$\therefore \cos C = \frac{5}{13}$, BC = 5K , AC= 13K, K ثابت



الشكل (3-5)

باستخدام مبرهنة فيثاغورس :

$$(AC)^2 = (AB)^2 + (BC)^2$$

$$(13K)^2 = (AB)^2 + (5K)^2$$

$$(AB)^2 = 144\,K^2$$

$$\therefore AB = 12\,K$$

$$\tan C = \frac{12\,K}{5\,K} = \frac{12}{5}$$

$$\sin A = \frac{5\,K}{13K} = \frac{5}{13}$$

$$\cos A = \frac{12\,K}{13\,K} = \frac{12}{13}$$



اذا علمت ان $\tan A = \frac{7}{24}$ في المثلث AB C القائم الزاوية في C .

جد $\cos B$, $\sin A$.

الحـــل / نرسم المثلث ABC القائم الزاوية في C

$$\tan A = \frac{7}{24} \Longrightarrow BC = 7\,K ,\ AC = 24\,K$$

$$(AB)^2 = (AC)+^2 (BC)^2$$

$$(AB)^2 = (24K)^2 + (7\,K)^2$$

$$AB = 25\,K$$



الشكل (6-3)

$$\sin A = \frac{7K}{25K} = \frac{7}{25}$$

$$\cos B = \frac{7K}{25K} = \frac{7}{25}$$



اذا كان مجموع زاويتين يساوي (90°) اي أنهما زاويتان متتامتان فان جيب احدهما يساوي جيب تمام الأخرى وبالعكس لاحظ مثال (6).

[6 - 3] النسب المثلثية للزوايا الخاصة :

30° ، 45° ، 60°

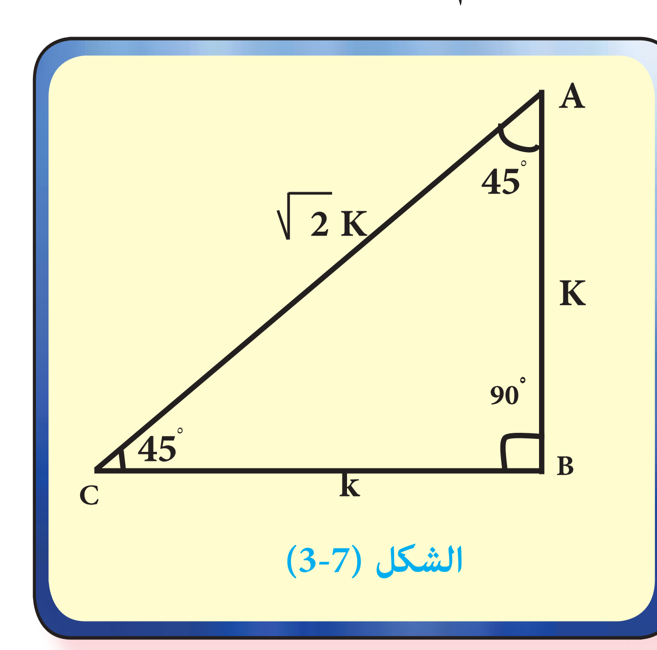
(1) زاوية قياسها 45° :

نفرض ان : $BC = K$, $AB = K$ وباستخدام فيثاغورس نجد $AC = \sqrt{2}\,K$

$$\sin 45^\circ = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{AB}{BC} = 1$$



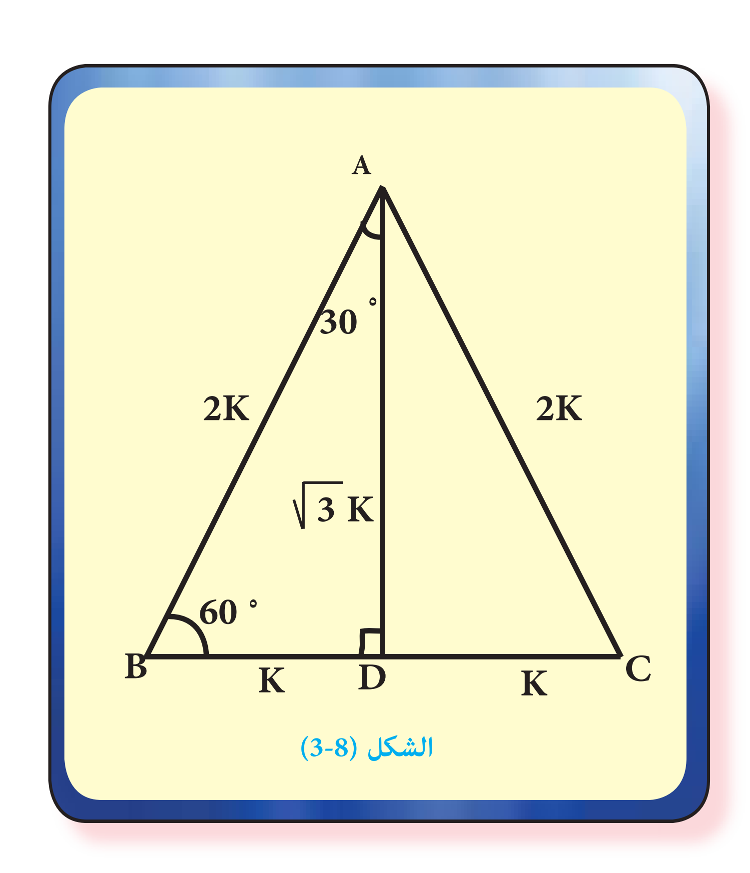
الشكل (7-3)

(2) زاوية قياسها 30° :

$$\sin 30^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{BD}{AD} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$



الشكل (3-8)

(3) زاوية قياسها 60° :

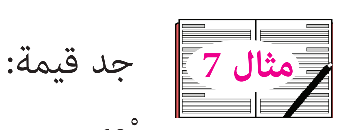
$$\sin 60^\circ = \frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{AD}{BD} = \sqrt{3}$$

ويمكن تلخيص النسب المثلثيةللزوايا الخاصة بالجدول الآتي :

النسب المثلثية / الزوايا الخاصة	0°	30°	45°	60°	90°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	غير معرف



جد قيمة:

$$\frac{3}{4}\tan^2 30^\circ + 2\sin 60^\circ + 3\tan 45^\circ + \cos^2 30^\circ - \tan 60^\circ$$



الحـــل /

$$\text{المقدار} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2\times\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\times 1 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \sqrt{3}$$

$$= \frac{3}{4}\times\frac{1}{3} + \sqrt{3} + 3 + \frac{3}{4} - \sqrt{3}$$

$$= \frac{1}{4} + 3 + \frac{3}{4} = 1 + 3 = 4$$



جد قيمة المقدار : $4\cos 30^\circ \cos 45^\circ \sin 30^\circ \sin 60^\circ \sin 45^\circ$

الحـــل /

$$\text{المقدار} = 4\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{4}$$



جد قيمة المقدار : $\sin 60^\circ \cos 30^\circ + \cos 60^\circ \sin 30^\circ$

الحـــل /

$$\text{المقدار} = \frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

[3-7] دائرة الوحدة والنقطة المثلثية للزاوية :

تعريف (3-3) :

دائرة الوحدة : Unit Circle هي دائرة مركزها نقطة الأصل ونصف قطرها يساوي وحدة طول واحدة .

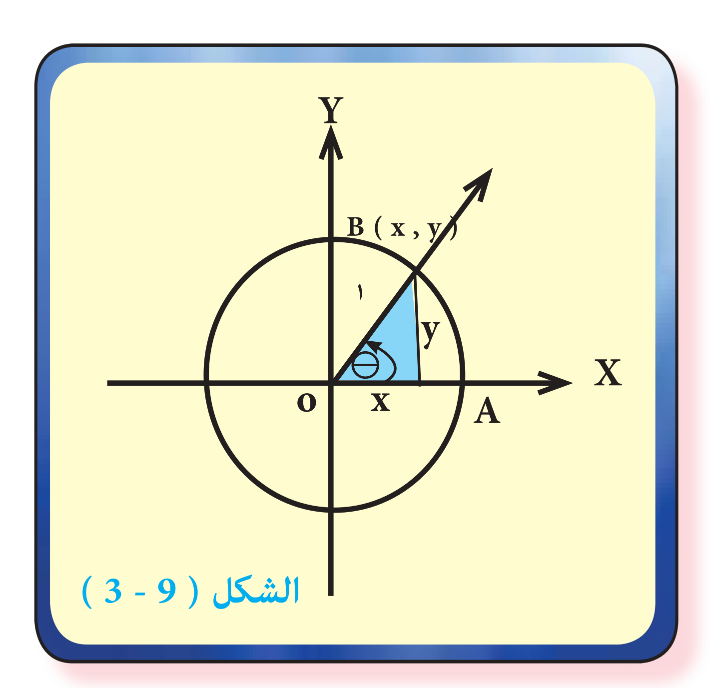
في الشكل (3-9) حيث أن ضلعها الابتدائي $\overrightarrow{OA}$ وضلعها النهائي $\overrightarrow{OB}$ لتكن $\overrightarrow{AOB}$ $\measuredangle$

زاوية موجهة في الوضع القياسي, B نقطة تقاطع الضلع النهائي OB مع دائرة الوحدة .

نفرض أن $B = (x , y)$

تعلم أن $\sin \theta = \frac{y}{1}$

$\Rightarrow y = \sin \theta$



الشكل (3 - 9)

ثم أن $\cos \theta = \frac{x}{1} \Rightarrow x = \cos \theta$

$B = (x , y) = (\cos \theta , \sin \theta)$ هذه النقطة تدعى بالنقطة المثلثية

Trigonometric Point

[3-8] إيجاد النسب المثلثية للزوايا $(180^\circ - \theta)$ حيث $\theta \in [0, 90^\circ)$

نعلم أن الجداول الرياضية تحوي النسب المثلثية للزوايا الحادة الموجبة عليه يمكن إيجاد النسب المثلثية لاية زاوية تقع في الربع الثاني أو الثالث أو الرابع وسنقصر دراستنا هذا العام على الزوايا المنفرجة والحادة . باستخدام دائرة الوحدة والإنعكاس على المستوي يمكن ايجاد النسب المثلثية للزوايا التي تقع في الربع الثاني حيث نجد ان :

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin\theta , \quad \theta \in [0, 90^\circ)$$

$$\cos(180^\circ - \theta) = -\cos\theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan\theta$$



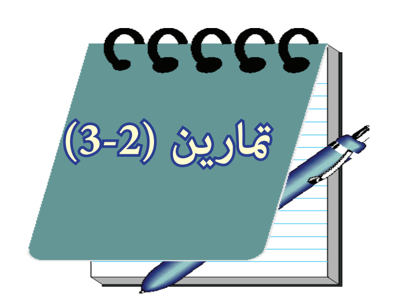
جد قيمة $\cos 120^\circ$ ، $\sin 135^\circ$ ، $\tan 150^\circ$

الحـل /

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = \frac{-1}{2}$$

$$\sin 135^\circ = \sin(180^\circ - 45^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\tan 150^\circ = \tan(180^\circ - 30^\circ) = -\tan 30^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}}$$



1) جد القيمة العددية لكل ممايأتي :

أ) $(2\tan 60^\circ \tan 45^\circ)(\tan 30^\circ - \tan 60^\circ)$

ب) $(\cos 60^\circ - \sin 60^\circ)(\sin 30^\circ + \cos 60^\circ)$

جـ) $\sin 60^\circ - \frac{1}{2}\ 3\cos 30^\circ \tan 60^\circ - 2\tan 45^\circ$

د) $\cos^2 30^\circ \tan^2 45^\circ \tan 60^\circ \sin 60^\circ \cos^2 45^\circ$

2) اذا كان $\sin\theta = \frac{3}{5}$ فجد $\tan\theta$, $\cos\theta$ حيث أن θ زاوية حادة في مثلث قائم الزاوية.

3) برهن على أن المجموعتين المرتبتين :

$\{1, 2, 3, 4\}$ ، $\{\sin^2 30^\circ, \sin^2 45^\circ, \sin^2 60^\circ, \sin^2 90^\circ\}$ متناسبتان

4) جد القيمة العددية لكل مما يأتي ثم جد النقطة المثلثية لكل منها :

أ) $\sin 150^\circ, \cos 150^\circ$

ب) $\tan 135^\circ, \cos 135^\circ$

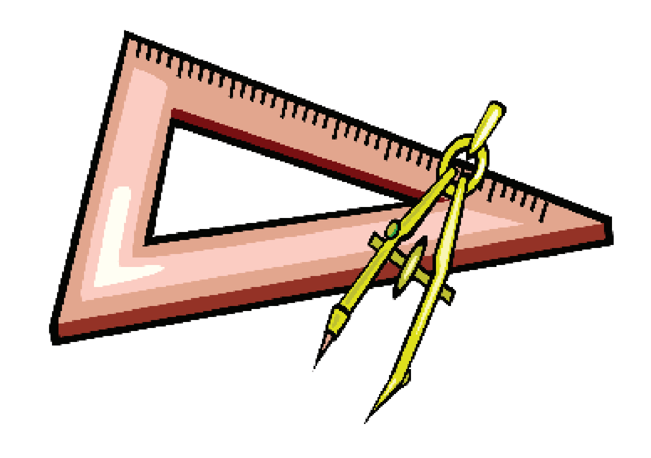
جـ) $\sin 120^\circ, \tan 120^\circ$

5) $A\,B\,C$ مثلث قائم الزاوية في C فيه $AC = 4\ cm$ $\quad m \measuredangle B = 60^{\circ}$

جد مساحته .

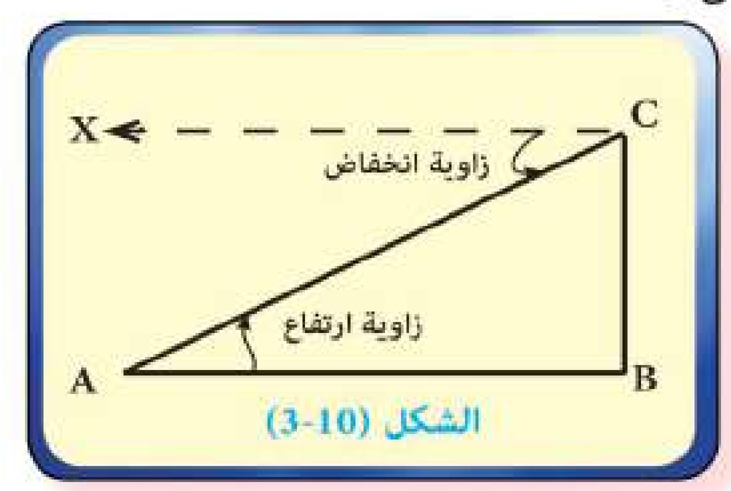
6) سلم طوله 10 متر مرتكز بطرفه الأسفل على أرض أفقية مستوية وطرفه الاعلى على حائط شاقولي فاذا كانت الزاوية بين السلم والأرض 30° فما بعد طرفه الأعلى عن الأرض ؟ وما بعد طرفه الأسفل عن الحائط ؟ $(\sqrt{3} = 1.7)$

7) $\left(L , \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ نقطة مثلثية للزاوية الحادة θ، جد قيمة L , $\tan \theta$.



[3 - 9] زوايا الأرتفاع والانخفاض :

نتمكن من حساب الارتفاعات والأبعاد عندما نتمكن من قياس الزوايا التي نراها فيها فاذاوقف راصد في نقطةA ونظر الى نقطة C التي تقع فوق أفق A فان الزاوية الحاصلة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى النقطة C وبين أفق A تدعى (زاوية ارتفاع C بالنسبة الى A) مثل الزاوية CAB في الشكل (10 - 3) أما اذا كانت عين الراصد في C ونظر الىA التي تحت أفق C، فان الزاوية الكائنة بين المستقيم الواصل من عين الراصد الى النقطة A وبين أفق C



الشكل (3-10)

تدعى (زاوية انخفاض A بالنسبة الى C) مثل الزاوية A C X في الشكل(10 - 3)

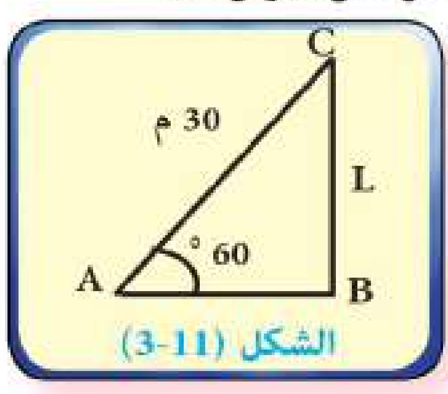


طائرة ورقية طول خيطها 30م فاذا كانت الزاوية التي يصنعها الخيط مع الارض (الافق) هي°60 جد ارتفاع الطائرة عن الارض .

الحـل / في الشكل (11 - 3) نفرض ان ارتفاع الطائرة عن الارض = L من وحدات الطول

$$\sin 60^\circ = \frac{L}{30} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{L}{30}$$

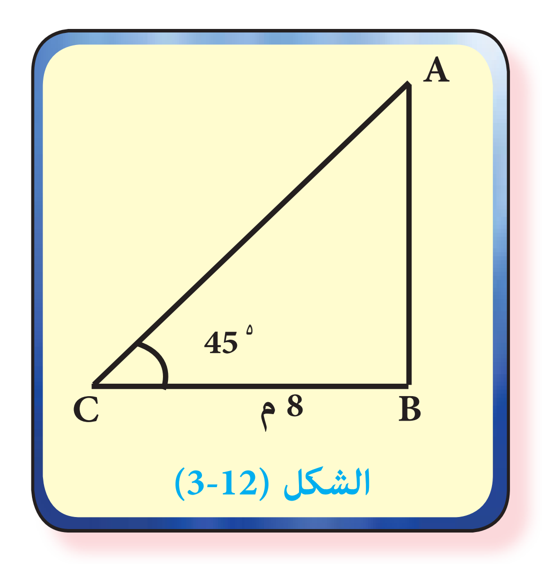
$L = 15\sqrt{3}$ متر الارتفاع



الشكل (3-11)


مثال 12 وجد راصد ان زاوية ارتفاع قمة مئذنة من نقطة على الارض تبعد 8 متر عن قاعدتها تساوي 45° فما ارتفاع المئذنة؟


الحل / ABC △ قائم الزاوية في B



الشكل (3-12)

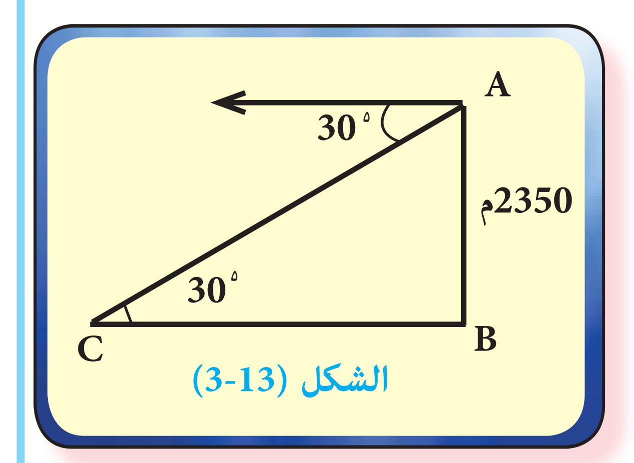
$$\tan 45^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$$

$$1 = \frac{AB}{8}$$

∴ AB = 8 متر ارتفاع المئذنة


مثال 13 جبل ارتفاعه 2350 متر وجد راصد من قمته أن قياس زاوية انخفاض نقطة على الارض 30° فما هو البعد بين النقطة والراصد ؟


الحل / قياس زاوية الارتفاع = قياس زاوية الانخفاض



الشكل (3-13)

ABC △ قائم الزاوية في B :

$$\sin 30^\circ = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{2350}{AC}$$

∴ AC = 4700 متر البعد بين النقطة والراصد .



1) وقف شخص في أعلى برج وأبصر شجرتين تقعان مع قاعدة البرج على استقامة واحدة ، فكانت زاوية انخفاض قاعدة الشجرة الأولى 60° وزاوية انخفاض قاعدة الشجرة الثانية 45° جد المسافة بين الشجرتين.

مع العلم أن ارتفاع البرج 30 مترا .

ج/ 12.67m

2) من نقطة تبعد عن قاعدة مئذنة 51m وجد أن زاوية ارتفاع قمتها 30° فما ارتفاع المئذنة .

ج/ 29.41m

3)عمود كهرباء طوله 6 أمتار مثبت شاقوليا (عموديا) على أرض أفقية ومربوط بسلك في نهايته العليا ومثبت على سطح الأرض وكان قياس الزاوية التي يصنعها السلك مع سطح الأرض 60° فما طول السلك .

ج/ 6.92m

4) وجد راصد زاوية ارتفاع منطاد مثبت هي 45° ولما سار الراصد في مستوى افق نحو المنطاد مسافة 1000m شاهد ان زاوية الارتفاع هي 60°، جد ارتفاع المنطاد .

ج/2428.57m

الفصل الرابع : الهندسة الاحداثية

[4-1]معادلة مجموعة نقاط في المستوي الاحداثي .

[4-2] معادلة المستقيم .

[4-3] ميل المستقيم .

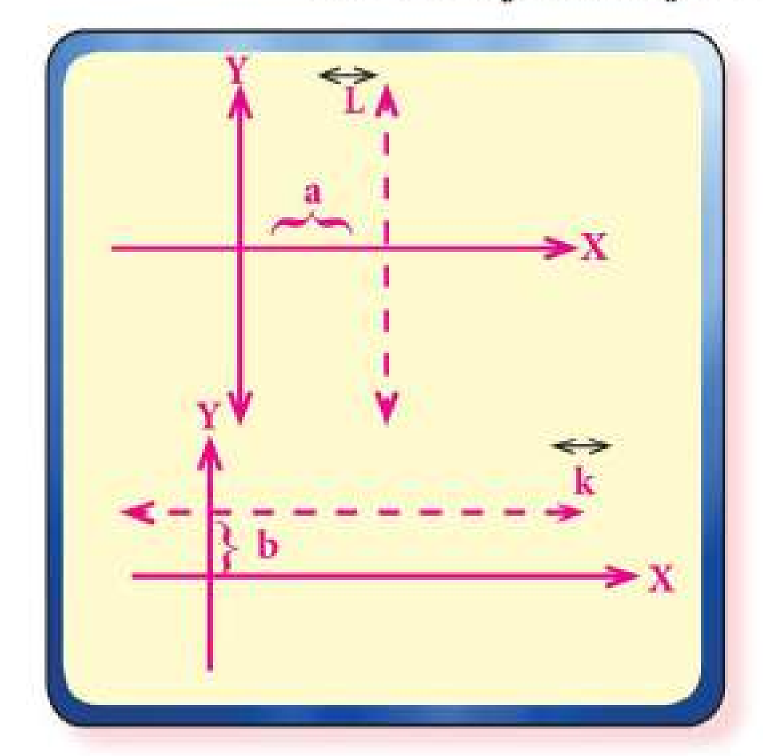
[4-4] استنتاج ميل المستقيم من معادلته .

[4-5] العلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين .

[4-6] العلاقة بين ميلي مستقيمين متعامدين .

[4-1] معادلة مجموعة نقاط في المستوي الاحداثي

لقد رأينا أن كل زوج مرتب (x , y) من الأعداد الحقيقية يعين نقطة في المستوي فاذا وجدنا معادلة تربط الاحداثي السيني لكل نقطة بالاحداثي الصادي لنفس النقطة ، سمينا هذه المعادلة (معادلة مجموعة النقاط المطلوب تعيينها) فلو اشترطنا مثلا أن تقع نقاط مجموعة جزئية من المستوي على مستقيم L وأوجدنا معادلة تربط الاحداثي السيني لنقطة اختيارية من هذه المجموعة بالاحداثي الصادي فاننا نسمي هذه المعادلة (معادلة المستقيم L) .



1) اذا كان $\overleftrightarrow{L}$ يوازي محور الصادات ويبعد عنه بالبعد a فان معادلته $x = a$

2) اذا كان $\overleftrightarrow{k}$ يوازي محور السينات ويبعد عنه بالبعد b فان معادلته $y = b$

وبصورة عامة يمكن معرفة نوع توازي المستقيم مع أحد المحورين من خلال معرفة أحد المعادلتين السابقتين :

فمعادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (x_1 , y_1) هي $x = x_1$

عندما $x_1 = 0$ فان المستقيم سوف ينطبق على محور الصادات .

و معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (x_1 , y_1) هي $y = y_1$

عندما $y_1 = 0$ فان المستقيم سوف ينطبق على محور السينات .

ومما سبق : فإن معادلة محور السينات هي $y = 0$ ومعادلة محور الصادات هي $x = 0$

[4-2] معادلة المستقيم

Equation of the line

(4 - 2 - 1) المعادلة الكارتزية لمستقيم مار بنقطتين :

لنفرض $a(x_1, y_1)$ ، $b(x_2, y_2)$ ، $c(x, y) \in \overleftrightarrow{ab}$ فتكون معادلة المستقيم المار بالنقطتين a ، b .

هي :

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين $(-2, 5)$ ، $(3, -1)$.

الحــل / $a(3, -1)$ ، $b(-2, 5)$ ، $c(x, y) \in \overleftrightarrow{ab}$

$$\because \frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore \frac{y + 1}{x - 3} = \frac{5 + 1}{-2 - 3} \Rightarrow \frac{y + 1}{x - 3} = \frac{6}{-5}$$

$$-5y - 5 = 6x - 18$$

$6x + 5y - 13 = 0$ معادلة المستقيم .



جد معادلة المستقيم المار بنقطة الأصل والنقطة (5 , 3 -)

الحــــل / لتكن $O\ (x_1, y_1)$ ، $A\ (x_2, y_2)$

معادلة المستقيمOA هي : $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

$$\frac{y-0}{x-0} = \frac{5-0}{-3-0} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{5}{-3}$$

$$5x = -3y \Rightarrow 5x + 3y = 0$$



[4-3] ميل المستقيم : Slope of The Line

تعريف (1 - 4) :

اذا كانت $b\ (x_2, y_2)$ ، $a\ (x_1, y_1)$ فان

ميل المستقيم $ab = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ بشرط $x_1 \neq x_2$



جد ميل المستقيم المار بالنقطتين (5-, 3) , (1- , 1)

الحــــل / الميل $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$$m = \frac{-1+5}{1-3} = \frac{4}{-2} = -2$$

تعريف (2 - 4) :

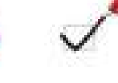
إذا كانت Θ هي قياس الزاوية الموجبة التي يصنعها المستقيم L مع الإتجاه الموجب لمحور السينات فإن :

ميل المستقيم $L = \tan \Theta$ حيث $\Theta \in [0, 180^\circ)/\{90^\circ\}$



أ) جد ميل المستقيم L_1 الذي يصنع زاوية مقدارها 45° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

ب) جد ميل المستقيم L_2 الذي يصنع زاوية مقدارها 150° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.



الحـل / ميل المستقيم $= \tan \Theta$

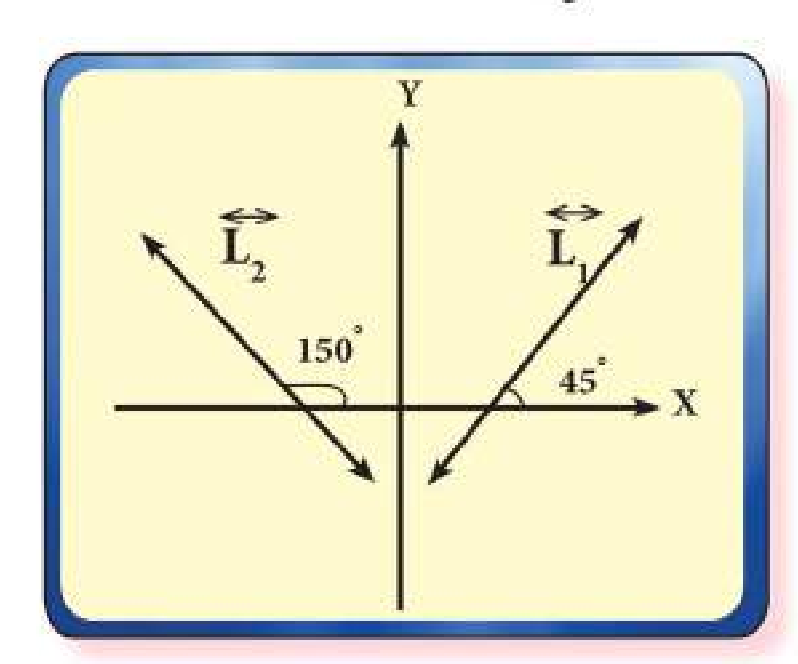
ميل $\overleftrightarrow{L_1} = \tan 45^\circ$

$= 1$

كذلك ميل $\overleftrightarrow{L_2} = \tan 150^\circ$

$= \tan(180^\circ - 30^\circ)$

$= -\tan 30^\circ = \frac{-1}{\sqrt{3}}$





(1) محور السينات أو أي مستقيم يوازي محور السينات ميله = 0 .

(2) محور الصادات أو أي مستقيم يوازي محور الصادات ميله غير معرف .

(3) معادلة المستقيم المار بالنقطة $a(x_1, y_1)$ وميله m .

معادلة المستقيم بدلالة نقطتين هي $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$

$m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ فتصبح المعادلة :

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$



جد معادلة المستقيم المار بالنقطة $(-3, 4)$ وميله $\frac{2}{3}$

المعادلة :

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x + 3)$$

$$3y - 12 = 2x + 6$$

$$2x - 3y + 18 = 0$$



جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة $(-2, 3)$ والذي يصنع $135°$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

الحل /

$$(x_1, y_1) = (-2, 3)$$

$$m = \tan 135°$$

$$m = \tan(180° - 45°)$$

$$m = -\tan 45°$$

$m = -1$

$(y - y_1) = m(x - x_1)$

$y - 3 = -1 \ (x + 2)$

معادلة المستقيم $x + y - 1 = 0$

[4-4] استنتاج ميل المستقيم من معادلته :

نفرض أن معادلة مستقيم هي $a x + b y + c = 0$ حيث $a ، b ، c \in R$

a , b لايساويا معا صفرا .

(1) بوضع $y = 0 \Leftarrow ax + c = 0 \Leftarrow x = \frac{-c}{a}$ (المقطع السيني)

وتمثل معادلة مستقيم يوازي المحور الصادي .

(2) بوضع $x = 0 \Leftarrow by + c = 0 \Leftarrow y = \frac{-c}{b}$ (المقطع الصادي)

وتمثل معادلة مستقيم يوازي المحور السيني .

(3) ميل المستقيم المار بنقطتي التقاطع $ax + by + c = 0$

مع المحورين الاحداثيين واللتان هما : $(\frac{-c}{a} , 0) , (0 , \frac{-c}{b})$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\frac{-c}{b}}{\frac{-c}{a}} = \frac{a}{b}$$

خلاصة القول أن المستقيم الذي معادلته $a x + b y + c = 0$ يكون ميله

$$m = -\frac{x \text{ معامل}}{y \text{ معامل}} = -\frac{a}{b}$$

بشرط $x ، y$ في طرف واحد من المعادلة وان $b \neq 0$



جد ميل المستقيم $3x - 4y - 12 = 0$ ثم جد المقطعين السيني والصادي .

الحل /

$$m = -\frac{a}{b} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

المقطع السيني . $y = 0 \Rightarrow 3x - 12 = 0 \Rightarrow x = 4$

المقطع الصادي . $x = 0 \Rightarrow -4y - 12 = 0 \Rightarrow y = -3$

[4-5] العلاقة بين ميلي مستقيمين متوازيين :

1) اذا توازى (Parallel) مستقيمان فان ميلاهما متساويين

اي اذا كان $\overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_1}$ فان $m_1 = m_2$

2) وبالعكس اذا تساوى ميلا مستقيمين فانهما متوازيان .

3) $\overleftrightarrow{L_1}$ معادلته : $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

$\overleftrightarrow{L_2}$ معادلته : $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

وعندما $\overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_1}$ فان $m_1 = m_2$

اي $\frac{-a_1}{b_1} = \frac{-a_2}{b_2}$ أو $\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}}$

[4-6] العلاقة بين ميلي مستقيمين متعامدين :

1) إذا تعامد (Perpendicular) مستقيمان فان حاصل ضرب ميلاهما = -1

أي إذا كان $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{L_1}$ فان $m_1 \times m_2 = -1$ او $m_1 = -\frac{1}{m_2}$

أو ان ميل أحدهما = مقلوب الآخر وبعكس الاشارة .



برهن على تعامد المستقيمين : $4x + 3y - 8 = 0$, $3x - 4y + 7 = 0$



الحـــل/ $m_2 = \frac{-4}{3}$ ، $m_1 = \frac{3}{4}$

$$m_1 \times m_2 = \frac{3}{4} \times \frac{-4}{3} = -1$$

$$\therefore \overleftrightarrow{L_1} \perp \overleftrightarrow{L_2}$$



جد معادلة المستقيم الذي يمر من النقطة (1 , 2 -) ويوازي المستقيم :

$$3y - 2x + 7 = 0$$

الحـــل/ ميل المستقيم المعلوم $m = -\frac{a}{b} = \frac{-(-2)}{3} = \frac{2}{3}$

المستقيمان متوازيان $\Leftarrow$ ميل المستقيم المطلوب $= \frac{2}{3}$

$\therefore$ معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل هي

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x + 2)$$

$3y - 3 = 2x + 4 \Longrightarrow \therefore 2x - 3y + 7 = 0$ معادلة المستقيم



جد معادلة المستقيم الذي يمر بالنقطة (-5 , 3) وعمودي على المستقيم :

$3x + y=1$



الحـــل/ ميل المستقيم المعلوم = -3

ميل المستقيم المطلوب = $\frac{1}{3}$

لان المستقيمان متعامدين

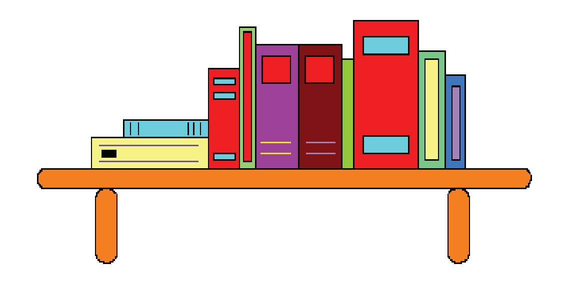
معادلة المستقيم بدلالة نقطة وميل هي :

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

$$y+ 5 = \frac{1}{3} (x - 3)$$

$$3y +15 = x-3$$

$x - 3y - 18 = 0$ ...... معادلة المستقيم .





أولا :

(1) جد ميل المستقيم المار بالنقطتين (0 , 2) ،(0 , -2) .

(2) اذا كانت a (2 , 3) , b (w , -3) ، فجد قيمة w بحيث يكون ميل $\overleftrightarrow{ab} = \frac{1}{2}$.

ثانيا :

لكل فقرة مما يأتي أربع اجابات واحدة فقط صحيحة . حدد الاجابة الصحيحة لكل فقرة :

(1) اذا كان $\overleftrightarrow{M} \perp \overleftrightarrow{L}$ ، $\overleftrightarrow{M}$ يمر بالنقطتين (5,1) ، (3,2) فان ميل $\overleftrightarrow{L}$ =

(أ) $\frac{1}{2}$ ، (ب) 2 ، (جـ) $\frac{2}{3}$ ، (د) $-\frac{2}{3}$.

(2) اذا كان $\overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{L}$, $\overleftrightarrow{M}$ يمر بالنقطتين (3 ,- 2) ، (3 , -2) فان ميل $\overleftrightarrow{L}$ =

(أ) $\frac{3}{2}$ ، (ب) $\frac{-3}{2}$ ، (جـ) $\frac{2}{3}$ ، (د) $-\frac{2}{3}$.

ثالثا :

(1) بين أن المستقيم L المار بالنقطتين (6 , 1) ، (3 , 1-) يوازي المستقيم M المار بالنقطتين (4 ,- 2 -) ،(1- , 0) .

(2) بين أن المستقيم L المار بالنقطتين (0 , 2) ،(5 , 0) عمودي على المستقيم M المار بالنقطتين (1 , 6) ،(1 - , 1) .

رابعا :

(1) جد معادلة المستقيم الذي ميله = $\frac{1}{2}$ ويمر بالنقطة (4- , 0) .

(2) جد معادلة المستقيم الموازي لمحور السينات ويمر بالنقطة (1 - , 2) .

(3) جد معادلة المستقيم الموازي لمحور الصادات ويمر بالنقطة (1 - , 2) .

(4) جد معادلة المستقيم المار بالنقطتين (3 , 1 -) ، (5 , 1 -) .

(5) جد معادلة المستقيم L المار بالنقطة (1-, 2) والموازي للمستقيم الذي ميله = $\frac{2}{3}$.

(6) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (2 - , 0) عموديا على المستقيم الذي ميله = $\frac{-3}{5}$.

(7) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (5 , 1-) والذي يصنع زاوية قياسها 150° مع الاتجاه الموجب لمحور السينات .

خامسا :

(1) جد الميل والمقطع السيني والصادي لكل مستقيم فيما يأتي :

أ) $\overleftrightarrow{L_1} : 2x - 3y + 5 = 0$

ب) $\overleftrightarrow{L_2} : 8y = 4x + 16$

جـ) $\overleftrightarrow{L_3} : 3y = - 4$

(2) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (5 - , 2) ويوازي المستقيم الذي معادلته :

$2x - y + 3 = 0$

(3) جد معادلة المستقيم المار بالنقطة (2 - , 2) عمودياً على المستقيم الذي

معادلته $x + y = 0$

سادساً :

إذا كان معادلة $\overleftrightarrow{L}$ هي : $wx - 8y = 7$ ومعادلة $\overleftrightarrow{M}$ هي : $5x + 2y = 11$ فجد

قيمة w إذا كان :

(1) $\overleftrightarrow{M} \parallel \overleftrightarrow{L}$.

(2) $\overleftrightarrow{M} \perp \overleftrightarrow{L}$.

الفصل الخامس : الأحصاء

[1-5] مقدمة

بعد الحصول على البيانات الاحصائية من الميدان ومراجعتها والتاكد من دقتها، يتم عرض هذه البيانات بطريقة مبسطة لكي يسهل فهمها ، كما تعلّم طالب المرحلة المتوسطة ان هذا العرض يتم بواسطة جداول أو رسوم بيانية أو اي رسوم اخرى مناسبة .

وقد تعّرف الطالب في دراسته السابقة على العروض الجدولية لكلا النوعين من البيانات سواء كانت بيانات كيفية او كمية وكون جداول تكرارية لبيانات كيفية او كمية كما كوّن جداول تكرارية ذات الفئات ، وقام بعرض هذه البيانات بواسطة المنحنيات او الدوائر او المدرجات التكرارية او المضلعات التكرارية او المنحنيات المتجمعة وفي هذا البند سنتعرف على المنحنيات المتجمعة لحاجتنا اليها في البنود القادمة ، اما في دراسة الطالب اللاحقة فسيتعرف على منحنيات أخرى هامة ومن أهمها :

(المنحني الطبيعي ، المنحني النوني ، المنحني الآسي ، المنحنيات الملتوية كما ستجد تطبيقات حياتية وعلمية) .

[2-5] المنحنيات المتجمعة :

تناولنا فيما سبق الجداول التكرارية ذات الفئات والجدول التالي يعطينا فكرة تفصيلية عن التوزيع حسب الفئات : توزيع السلع في احدى المخازن حسب فئات الوزن بالكيلو غرام

فئات الوزن (كغم)	التكرار (عدد السلع)
20-	2
25-	4
30-	5
35-	7
40-	12
45-	8
50-	7
55-60	5

الجدول رقم (١)

من الجدول رقم (1) نجد أن عدد السلع التي يتراوح وزنها بين 25 كغم الى اقل من 30 كغم هي (4) سلع وكذلك عدد السلع التي يتراوح وزنها بين 50 إلى 55 كغم هي (7) سلع ولكن احيانا يهمنا التعرف على بيانات اخرى اجمالية بدلا من البيانات التفصيلية فمثلاً نحتاج إلى معرفة عدد السلع التي تقل اوزانها عن 30 كغم وهي في هذه الحالة 6 سلع وتحصل عليها بجمع التكرارات في الفئتين الأولى والثانية وكذلك نحتاج إلى معرفة عدد السلع التي تبلغ اوزانها 45 كغم فاكثر هي (20) سلعة ونحصل عليها بجمع التكرارات في الفئات الثلاثة الأخيرة لذلك نحتاج إلى تكوين جداول تكرارية متجمعة وفي هذا الجدول يتم تجميع التكرارات من أحد طرفي الجدول إلى الطرف الآخر والجداول التكرارية نوعان :

أولا : الجدول المتجمع الصاعد :

في هذا النوع من الجداول يتم تجميع التكرارات من جهة الفئات الصغيرة إلى جهة الفئات الكبيرة (اي من أعلى الجدول التكراري إلى أسفله) ويتكون هذا الجدول من عمودين : الأول للحدود العليا للفئات والثاني للتكرار المتجمع الصاعد كما في المثال الآتي :




كون الجدول المتجمع الصاعد للبيانات الموجودة في الجدول رقم (1)


الحــــل /

(1) نكون جدولاً من عمودين .

(2) يخصص العمود الأول للحدود العليا للفئات وهي أقل من 25 كغم ، اقل من 30 كغم ، ... وهكذا .

(3) يخصص العمود الثاني للتكرارات المتجمعة الصاعدة التي نحصل عليه من الجدول رقم (1) حيث نجد أن عدد تكرارات القيم التي اقل من 25 هي 2 . وتكرارات القيم التي أقل من 30 هي 6 = 4 + 2 والتي أقل من 35 هي11= 5+4+2 ، وهكذا نضيف التكرار التالي إلى المجموع السابق في كل خطوة حتى نصل إلى مجموع التكرارات كآخر تكرار متجمع كما في الجدول رقم (2) .

الجدول المتجمع الصاعد لتوزيع السلع حسب الوزن بالكيلو غرام

الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع الصاعد
اقل من 25 كغم	2
اقل من 30 كغم	6
اقل من 35 كغم	11
اقل من 40 كغم	18
اقل من 45 كغم	30
اقل من 50 كغم	38
اقل من 55 كغم	45
اقل من 60 كغم	50

الجدول رقم (2)

ثانياً : الجدول المتجمع النازل :

في هذا الجدول تجمع التكرارات من جهة الفئات الكبيرة إلى جهة الفئات الصغيرة (اي من أسفل الجدول التكراري إلى اعلاه) ويتكون هذا الجدول أيضاً من عمودين الأول للحدود الدنيا للفئات والثاني للتكرار المتجمع النازل . كما في المثال الآتي :





كون الجدول المتجمع النازل للبيانات الموجودة في الجدول رقم (1) .



الحــل /

(1) نكون جدولاً من عمودين .

(2) نخصص العمود الأول للحدود الدنيا للفئات وهي 20 كغم فاكثر ،25 فاكثر ، وهكذا....

(3) نخصص العمود الثاني للتكرارات المتجمعة النازلة التي نحصل عليها من الجدول رقم (1)

حيث نجد على سبيل المثال :

ان تكرارت القيم التي تساوي 20 فأكثر هي 50 وان تكرار القيم التي تساوي 25 فأكثر هو 48 = 2 - 50 والتي تساوي 30 فأكثر هو 44= 2 - 4 - 50 وهكذا نطرح التكرار السابق في كل خطوة حتى نصل الى آخر تكرار في الجدول رقم (1) كآخر تكرار متجمع نازل وذلك في الجدول رقم (3) .

الحدود العليا للفئات	التكرار المتجمع النازل
20 فاكثر	50
25فاكثر	48
30 فاكثر	44
35 فاكثر	39
40 فاكثر	32
45 فاكثر	20
50 فاكثر	12
55 فاكثر	5

الجدول رقم (3)

تمثيل البيانات

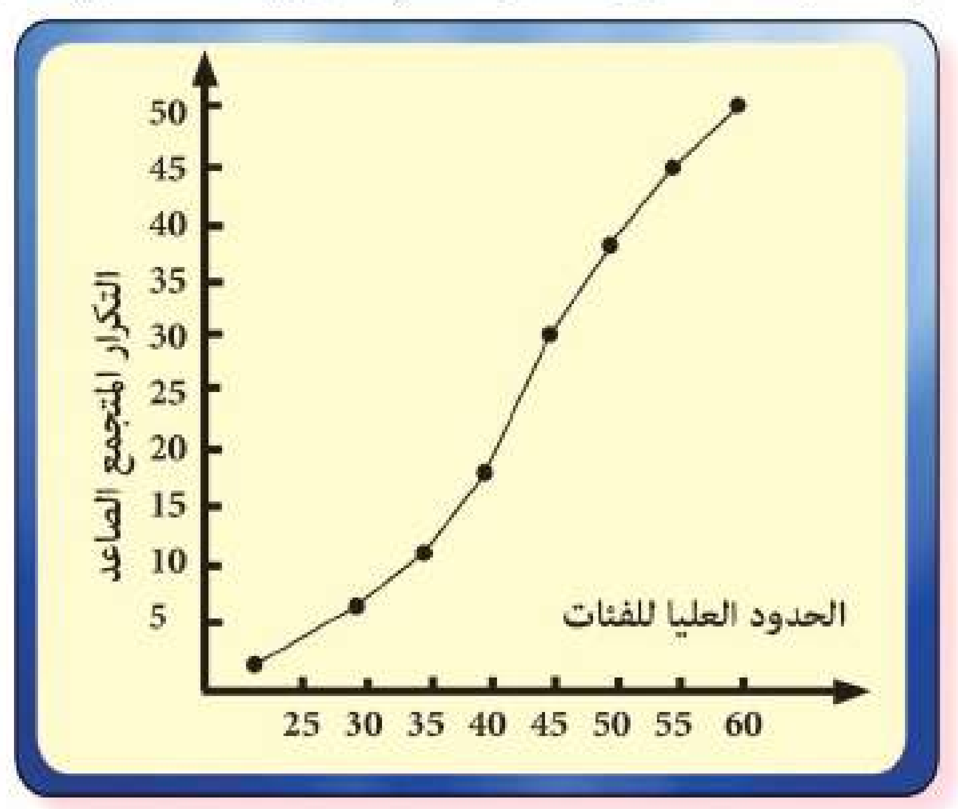
(أ) المنحني المتجمع الصاعد :

لتمثيل المنحني المتجمع الصاعد ، نرسم محورين متعامدين ، ونخصص المحور الأفقي للحدود العليا للفئات ، والرأسي للتكرارات المتجمعة ، ثم نؤشر النقط على الشكل بحيث تكون الاحداثيات السينية للنقاط هي الحدود العليا للفئات ثم نصل هذه النقط بخط ممهد ليتكون لدينا منحنى صاعد يبدأ من أصغر تكرار متجمع وينتهي بالتكرار الكلي .



ارسم المنحنى المتجمع الصاعد من بيانات الجدول رقم (2) .

الحـــل / نرسم محورين متعامدين ، ونقسم المحور الأفقي حسب الحدود العليا للفئات الموجودة في الجدول وهي ..... 30 , 25 ونقسم المحور الرأسي إلى اقسام متساوية ، بحيث تشمل مجموع التكرارات . ثم نؤشر النقط وذلك بأخذ الحد الأعلى للفئة مع التكرار المتجمع الصاعد ، اي (2 ، 25) ,(6 , 30) ، .... (60,50) , ثم نصل هذه النقط بخط ممهد ، فنحصل بذلك على المنحني المتجمع الصاعد كما في الشكل (1-5).



الشكل (1 - 5) منحني التكرار المتجمع الصاعد

(ب) المنحنى المتجمع النازل :

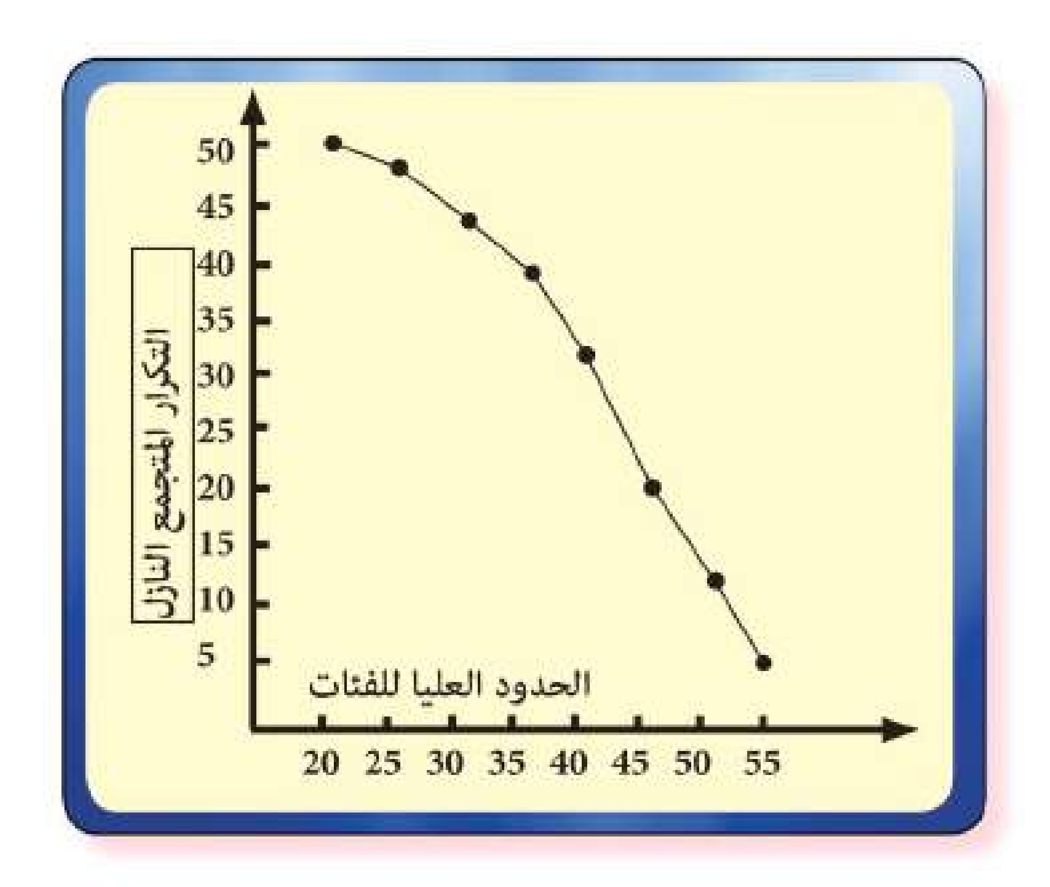
كما في المنحى المتجمع الصاعد ، نرسم محورين متعامدين ، ونخصص المحور االافقي للحدود الدنيا للفئات ، والرأسي للتكرارات المتجمعة النازلة (أو أعلى تكرار متجمع نازل) ثم نؤشر النقط على المحورين بحيث تكون احداثيات النقط هي الحدود الدنيا للفئات والتكرارات المتجمعة النازلة ، ثم نصل هذه النقط بخط ممهد فنحصل على المنحنى المتحمع النازل الذي يبدأ من المجوع الكلي للتكرارت وينتهي بآخر تكرار متجمع .



مثال 4 ارسم المنحنى المتجمع النازل من بيانات الجدول رقم (3) .

الحـل / نرسم محورين متعامدين ، ونقسم المحور الأفقي حسب الحدود الدنيا للفئات الموجودة في الجدول وهي .... 25 , 20 ونقسم المحور الرأسي إلى اقسام متساوية بحيث يشتمل على مجموع التكرارات . ثم نؤشر النقاط بعد ذلك بأخذ الحد الأدنى للفئة مع التكرار المتجمع النازل . مثلاً :

(50 , 20) ، (48 , 25) , ... (5 , 55) ، وبعد ذلك نصل هذه النقط بخط ممهد لنحصل على المنحني المتجمع النازل كما في الشكل (2 - 5) .



الشكل (2 - 5) منحني التكرار المتجمع النازل

[5-3] مقاييس النزعة المركزية: Measures of Central Tendency

(1 - 3 - 5) مقدمة :

اخذنا في المراحل الدراسية السابقة طرائق جمع البيانات وعرضها جدولياً وبيانياً والآن نريد أن نبحث عن مقياس يكون معبراً عن الظاهرة موضوع الدراسة وممثلاً لها .

أي نريد الحصول على قيمة واحدة تعبر عن جميع القيم . فمتوسط الدخل مثلاً في بلد ما يعبر عن جميع الدخول في هذا البلد أي يعبر عن المستوي العام للدخل .

ومن خصائص البيانات - (اي بيانات) - ان لها نزعة أو ميلاً لأن تتركز حول قيمة معينة متوسطة وهذه القيم التي تتركز حولها البيانات تسمى بالمتوسطات أو مقاييس النزعة المركزية . وسوف نتناول أهم مقاييس النزعة المركزية بشيء من التوسع بعد أن درستها في المرحلة المتوسطة بشكل بسيط وهي :

* الوسط الحسابي .
* الوسيط .
* المنوال .

وتختلف هذه المقاييس الثلاثة من حيث الفكرة وطريقة الحساب كما لكل منها مزاياه وعيوبه . كما أن هناك بعض الحالات التي يستخدم فيها أحد المقاييس دون الآخر .

[4 - 5] الوسط الحسابي : Arithmatic Mean

تعريف (1 - 5) :

يعرف الوسط الحسابي لمجموعة من القيم : أنه القيمة التي لو حلت محل قيمة كل مفردة في المجموعة لكان مجموع هذه القيم الجديدة مساوياً لمجموع القيم الأصلية وبالتالي فإن الوسط الحسابي يساوي مجموع القيم على عددها ويرمز له $\overline{X}$.

طريقة حساب الوسط الحسابي :

أولاً / البيانات غير المبوبة :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

وبالرموز

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots\dots + x_n}{n}$$

مثال 5 اذا كانت اعمار خمسة اشخاص هي :

5 سنوات ، 8 سنوات ، 9 سنوات ، 11 سنة ، 12 سنة ، احسب الوسط الحسابي لاعمار هؤلاء الأشخاص .



الحــل / $\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$

$$\bar{x} = \frac{5 + 8 + 9 + 11 + 12}{5}$$

$$\bar{x} = \frac{45}{5} = 9$$

ثانياً / في البيانات المبوبة :

[1 - 4 - 5] الوسط الحسابي للتوزيع التكراري البسيط :

اذا كانت القيم الاحصائية متجمعة في توزيع تكراري بسيط فيمكن استخدام القانون الآتي :

$$\text{الوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع حاصل ضرب كل مركز فئة في تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \dots\dots + x_n f_n}{f_1 + f_2 + \dots\dots + f_n}$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i} \qquad i= 1، 2 ، 3 ....n$$

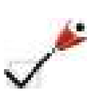
ملاحظة $\sum$ هو رمز المجموع



هَبْ أن هناك (3) اشخاص عمر كل منهم 8 سنوات ، و(5) اشخاص عمر كل منهم 9 سنوات و4 اشخاص عمر منهم 11 سنة وشخصين اثنين عمر كل منهم 12 سنة كما في الجدول التالي :

عدد الاشخاص	العمر
3	8
5	9
4	11
2	12

(هذا الجدول من دون فئات) فيكون عدد الاعمار هو الذي يمثل مركز الفئة . احسب الوسط الحسابي للعمر.



الحــل / اذا رمزنا للعمر بالرمز x ولعدد الاشخاص او التكرار بالرمز f فإن خطوات الحل يمكن تبسيطها كما في الجدول التالي :

العمر×التكرار(x.f)	التكرار (f)	العمر (x)
8×3 = 24	3	8
9×5 = 45	5	9
11×4 = 44	4	11
12×2 = 24	2	12
$\sum(xf)=137$	$\sum f=14$	

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{137}{14} = 9.786$$

[2-4-5] الوسط الحسابي للتوزيع التكراري ذي الفئات :

ولنتقدم خطوة أخرى ونأخذ حالة الجداول التكرارية ذات الفئات .



احسب الوسط الحسابي من الجدول التالي الذي يبين توزيع مئة شخص حسب فئات الوزن بالكيلو غرام .

فئات الوزن	عدد الاشخاص
-30	9
-40	15
-50	22
-60	25
-70	18
80 - 90	11
	المجموع 100

الحـــل / نوجد مركز كل فئة

مركز الفئة الأولى = $\frac{40 + 30}{2} = \frac{70}{2} = 35$

مركز الفئة الثانية = $\frac{50 + 40}{2} = \frac{90}{2} = 45$

وبالتالي فإن خطوات الحل هي :

1- حساب مراكز الفئات ونرمز لها بالرمز (x) .

2- نضرب مركز الفئة (x) في تكرارها (f) .

فئات الوزن	مركز الفئات (x)	التكرار f	x.f
30–	35	9	315
40–	45	15	675
50–	55	22	1210
60–	65	25	1625
70–	75	18	1350
80–90	85	11	935
		$\sum f=100$	$\sum xf= 6110$

3- نوجد الوسط الحسابي من العلاقة

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{6110}{100}$$

= 61.1 كيلو غرام



جد الوسط الحسابي من الجدول التكراري الآتي :

الفئات	8-	10-	12-	14-	16-	18-20	
التكرار	5	15	20	10	6	4	المجموع 60

فئات الوزن	مركز الفئات (x)	التكرار f	x . f
8-	9	5	9×5 =45
10-	11	15	11×15=165
12-	13	20	13×20=260
14-	15	10	15×10=150
16-	17	6	17×6=102
18-20	19	4	19×4=76
		$\sum f = 60$	$\sum fx = 798$

الحــــل /

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i f_i}{\sum f_i}$$

$$\bar{x} = \frac{798}{60}$$

$$\bar{x} = 13.3$$

مزايا الوسط الحسابي :

(1) يمتاز بالسهولة والبساطة في العمليات الحسابية .

(2) تدخل جميع القيم في حسابه .

العيوب :

(1) يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة وهي التي تكون كبيرة جداً أو صغيرة جداً بالنسبة لمعظم القيم وبالتالي فهي ترفع قيمة الوسط او تخفض قيمته عن معظم القيم .

(2) لايمكن أيجاده بيانياً .

[5-5] الوسيط : Median

تعريف (2 - 5) :

يعرف الوسيط لمجموعة من القيم إنه القيمة التي تتوسط المجموعة بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً وبالتالي فإن عدد القيم الأصغر منه يكون مساوياً لعدد القيم الاكبر منه .

طريقة حساب الوسيط :

أولاً / في البيانات غير المبوبة :

نرتب القيم ترتيباً تصاعدياً أو تنازلياً ثم نأخذ القيمة التي تقع في المنتصف لتكون هي الوسيط . هذا اذا كان عدد القيم فردياً . اما إذا كان عدد القيم زوجياً فنأخذ القيمتين اللتين في المنتصف ويكون الوسيط هو مجموع القيمتين مقسوماً على (2) .



احسب الوسيط لأوزان الطلاب التالية بالكيلو غرام :

52 , 58 , 50 , 63 , 55

الحـل / نرتب القيم تصاعدياً : 50,52,55,58,63

نلاحظ أن القيمة التي في المنتصف هي الثالثة في الترتيب .

∴ قيمة الوسيط = 55



احسب الوسيط لأوزان الطلاب التالية بالكيلو غرام :

55 , 57 , 63 , 50 , 58 , 53

الحـل / نرتب القيم تصاعدياً 50,53,55,57,58,63 نلاحظ

وجود قيمتين في المنتصف ويكون الترتيب كالآتي :

الأولى $\frac{n}{2}$ والثانية $\frac{n}{2} + 1$ أي أن :

ترتيب الأول = $\frac{6}{2} = 3$

وترتيب الثاني = $\frac{6}{2} + 1 = 3 + 1 = 4$

أي أن قيمة الوسيط تنحصر بين القيمتين الثالثة والرابعة .

∴ قيمة الوسيط = $\frac{57 + 55}{2}$

$= \frac{112}{2} = 56$

ثانياً / في البيانات المبوبة :

يمكن حساب الوسيط في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات حسابياً وحسب الخطوات الآتية :

(1) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد من الجدول التكراري .

(2) حساب ترتيب الوسيط وهو = $\frac{\text{مجموع التكرارت}}{2}$

(3) تحديد الفئة التي تحتوي على الوسيط من الجدول التكراري المتجمع الصاعد وتسمى الفئة الوسيطية وهي الفئة التي تقابل أول تكرار أكبر أو يساوي ترتيب الوسيط .

(4) قيمة الوسيط =

$$\text{الحد الأدنى للفئة الوسيطية} + \frac{\text{ترتيب الوسيط - التكرار المتجمع للفئة قبل الوسيطية}}{\text{تكرار الفئة الوسيطية}} \times \text{طول الفئة}$$

بالرموز :

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - f_b}{f_m} \times W$$

حيث f_b = التكرار المتجمع الصاعد للفئة قبل الوسيطية .

f_m = تكرار الفئة الوسيطية .

f = التكرار .

w = طول الفئة .

ME = الوسيط .

L= الحد الادنى للفئة الوسيطية .



جد وسيط الوزن من الجدول التالي :

فئات الوزن	تكرار عدد الاشخاص	التكرار المتجمع الصاعد
30 –	9	9
40 –	15	24
50 –	22	46
60 –	25	71
70 –	18	89
80 - 90	11	100
	المجموع 100	

الحــل /

$$\text{ترتيب الوسيط} = \frac{100}{2} = 50$$

$$ME = L + \frac{\frac{\sum f}{2} - f_b}{f_m} \times W$$

الفئة الوسيطية هي 60 - 70

$$ME = 60 + \frac{50 - 46}{25} \times 10$$

$$= 60 + \frac{40}{25}$$

$$= 60 + 1.6$$

$$ME = 61.6$$

مزايا الوسيط :

(1) لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة .

(2) يمكن ايجاده بيانياً .



(1) لا تدخل جميع القيم في حسابه .

(2) في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات تستخدم طرق تقريبية في حسابه .

[5-6] المنــوال : Mode

تعريف (3 - 5) :

يعرف المنوال لمجموعة من القيم أنه القيمة الأكثر تكراراً أو التي تقابل أكبر التكرارات ويرمز له MO.



ما القيمة المنوالية لمجموعة الأعداد الآتية : 4 , 7 , 9 , 4 , 3 , 8 , 4 , 2 , 4

الحـل / القيمة المنوالية = 4 لأنها تكررت اكثر من غيرها .

طريقة الفروق لحساب المنوال في البيانات المبوبة ذات الفئات

$$\text{المنوال} = \text{الحد الأدنى للفئة المنوالية} + \frac{d_1}{d_1+d_2} \times \text{طول الفئة المنوالية}$$

حيث d_1 = الفرق بين التكرار المنوالي والتكرار السابق له .

d_2 = الفرق بين التكرار المنوالي والتكرار اللاحق .

وان التكرار المنوالي هو اكبر تكرار في الجدول . والفئة المنوالية التي تقابل اكبر تكرار .



احسب المنوال من الجدول

فئات	التكرار	
30 –	9	
40 –	15	
50 –	22	⟸ التكرار السابق
60 –	25	⟸ التكرار المنوالي
70 –	18	⟸ التكرار اللاحق
80 – 90	11	

الحــل /

$d_1 = 25 - 22 = 3$

$d_2 = 25 - 18 = 7$

طول الفئة المنوالية $70 - 60 = 10$

المنوال = الحد الأدني للفئة المنوالية + $\frac{d_1}{d_1 + d_2}$ × طول الفئة المنوالية

$$MO = 60 + \frac{3}{3 + 7} \times 10$$

$$= 60 + \frac{3}{10} \times 10$$

$$= 60 + 3$$

المنوال $MO = 63$

مزايا المنوال :

(1) بسيط من حيث الفكرة أو طريقة إيجاده .

(2) لا يتأثر بالقيم الشاذة أو المتطرفة .

العيوب :

(1) رغم تعدد طرق حسابه الا أنها طرق تقريبية لا سيما في حالة البيانات المبوبة ذات الفئات .

(2) في بعض الحالات وحسب التعريف لا يمكن ايجاد المنوال ، اي لا يوجد منوال للقيم (اذا لم توجد قيمة متكررة اكثر من غيرها) وفي **حالات أخرى** يوجد أكثر من منوال(كما في حالة تكرار القيم بالدرجة نفسها واكثر من باقي القيم).



1) البيانات التالية تمثل أعمار مجموعة من الطلاب :

15 , 17 , 16 , 18 , 15 , 17 , 18 , 17 , 19 .

جد كل مما يأتي :

أ) الوسط الحسابي　　ب) الوسيط　　جـ) المنوال

2) إذا فرضنا أن الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في أحد الصفوف بمادة الرياضيات للعام الماضي هي (80) درجة وفي العام الذي قبله (75) درجة . وإذا فرضنا أن عدد طلاب الصف في العام الماضي (20) طالبا وفي العام الذي قبله (15) طالباً .
احسب الوسط الحسابي لدرجات الطلاب في العامين .

3) الجدول التالي يبين توزيع درجات الحرارة في إحدى المدن خلال 90 يوماً في فصل الصيف في احد الأعوام .

فئات درجات الحرارة	20-	24-	28-	32-	36-	40-	44 - 48	المجموع
عدد الأيام	8	10	18	23	15	9	7	90

أ) حساب قيمة الوسط الحسابي لدرجات الحرارة .

ب) حساب قيمة الوسيط .

جـ) حساب قيمة المنوال .

[5-7] مقاييس التشتت : Measures of Varedtion

ان لكل مجموعة من الأعداد وسطاً حسابياً وأن اعداد هذه المجموعة ربما تكون متجمعة بالقرب منه أو مبتعدة عنه ، فإذا كانت هذه الأعداد متجمعة بالقرب من وسطها الحسابي ، فإن مقدار تشتتها ضئيل ، واذا كانت هذه الأعداد مبتعدة عن وسطها الحسابي فإن تشتتها كبير.



إن الوسط الحسابي للأعداد 30 , 40 , 50 , 60 , 70 هو 50

والوسط الحسابي للأعداد 10 , 20 , 90 , 100 هو 55

عند تأمل أعداد المجموعة الأولى تشاهد ان تشتتها عن الوسط الحسابي ضئيل ، بينما تشتت أعداد المجموعة الثانية عن الوسط الحسابي كبير .

مقاييس التشتت

ان مقاييس التشتت التي سوف ندرسها هي :

1- المدى .

2- الانحراف المعياري .

[1 - 7 - 5] المـــدى : Range

المدى : هو الفرق بين اكبر قيمة واصغر قيمة للمتغير .

والمدى ليس مقياساً هاماً للتشتت ، لأنه يتوقف على قيمتين فقط من قيم المتغير ، وهما اقل قيمة واكبر قيمة للمتغير ولذا فهو يتأثر تأثراً بالغاً بذبذبات العينة . وان أي تغير يحدث في أي من هاتين القيمتين يؤثر بوضوح في قيمة المدى .



ما هو المدى في مجموعة القيم التالية ؟ 12 , 35 , 68 , 24 , 98

الحـــل / المدى = 98 - 12 = 86



ما هو المدى في التوزيع التكراري الآتي ؟

الفئات	5-	15-	25-	35-	45 - 55
التكرار	3	8	15	14	7

الحـــل / المدى = 55 - 5 = 50

[2 - 7 - 5] الانحراف المعياري : Standard Deviation

يعد الانحراف المعياري من اكثر مقاييس التشتت استخداما . فإذا كانت لدينا ن من المفردات : $x_1 , x_2 ,...,xn$ ووسطها الحسابي $\overline{x}$. فإن هذه المفردات تكون متقاربة من بعضها البعض إذا كانت قريبة من وسطها الحسابي $\overline{x}$ اي إذا كانت انحرافاتها عن $\overline{x}$ صغيرة. وبالتالي فإن انحرافات المفردات عن وسطها الحسابي يمكن استخدامها لقياس التشتت ، ويمكن ان يتم ذلك باخذ متوسط هذه الانحرافات .

تعريف (4 - 5) :

الانحراف المعياري : هو القيمة الموجبة للجذر التربيعي لمتوسط مربعات انحرافات قيم مفردات التوزيع عن وسطها الحسابي ويرمز له بالرمز (S) .

حساب الانحراف المعياري لقيم غير التكرارية او في توزيع تكراري :

1- نستخرج الوسط الحسابي ($\bar{x}$) لتلك القيم .

2- نستخرج انحراف كل قيمة عن وسطها الحسابي ($x - \bar{x}$) .

3- نربع الانحرافات $(x - \bar{x})^2$.

4- نجمع مربعات الانحرافات $(x - \bar{x})^2$.

5- نقسم الناتج على عدد القيم $\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}$

6- نأخذ الجذر التربيعي الموجب للناتج الأخير .

فيكون الانحراف المعياري

$$\sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

او

$$S=\sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

7- أما في القيم المتجمعة في توزيع تكراري فيوجد قانون آخر يمكن استخدامه وهو :

$$S=\sqrt{\frac{\sum f x^2}{\sum f} - \bar{x}^2}$$



احسب الانحراف المعياري للقيم الآتية :

34 , 25 , 21 , 32 , 29 , 24 , 28 , 23



x	$(x - \bar{x})$	$(x - \bar{x})^2$
23	23 - 27 = - 4	16
28	1	1
24	-3	9
29	2	4
32	5	25
21	-6	36
25	-2	4
34	7	49
$\sum x = 216$		$\sum (x - \bar{x})^2 = 144$

$$\bar{x} = \frac{216}{8} = 27$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$$

$$= \sqrt{\frac{144}{8}} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$= 3 \times 1.414 = 4.242$$



احسب الانحراف المعياري للبيانات التالية : 1 ، 3 ، 5 ، 7 ، 9

الحــل / نطبق القانون التالي في ايجاد (S) :

$$\bar{x} = \frac{25}{5} = 5$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{165}{5} - 25}$$

$$S = \sqrt{33 - 25} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$S = 2 \times 1.414$$

$$S = 2.828 = 2.83$$

x	x^2
1	1
3	9
5	25
7	49
9	81
المجموع 25	المجموع 165





استخدام القانون $S = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}}$ لايجاد الانحراف المعياري



اطرح (20) من كل قيمة من القيم الموجودة في المثال (17) ثم احسب الانحراف المعياري للقيم الجديدة وقارن النتائج .



الحـــل / بعد طرح (20) من كل قيمة تصبح القيم

14 , 5 , 1 , 12 , 9 , 8 , 3

x	3	8	4	9	12	1	5	14	$\sum x = 56$
x^2	9	64	16	81	144	1	25	196	$\sum x^2 = 536$

$$\bar{x} = \frac{56}{8} = 7$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{536}{8} - 49}$$

$$S = \sqrt{67 - 49} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$= 3 \times 1.414 = 4.242$$

يلاحظ من المثالين (17) , (19) أن قيمة الانحراف المعياري فيهما متساوية ومن هذا نستنتج أن طرح كمية ثابتة من جميع القيم لا تؤثر على قيمة الانحراف المعياري .



احسب الانحراف المعياري من الجدول التكراري الآتي :

الفئات	15 -	25 -	35 -	45 -	55 -	65 -	75 - 85
التكرار	6	12	18	24	20	12	8



الحـــل / نكون الجدول الآتي :

الفئات	التكرار f	مراكزالفئات x	xf	x^2 f
15-	6	20	120	2400
25 -	12	30	360	10800
35 -	18	40	720	28800
45 -	24	50	1200	60000
55 -	20	60	1200	72000
65 -	12	70	840	58800
75 - 85	8	80	640	51200
المجموع	100		5080	284000

$$\bar{x} = \frac{5080}{100} = 50.8$$

$$S = \sqrt{\frac{\sum x^2 f}{\sum f} - \bar{x}^2}$$

$$S = \sqrt{\frac{284000}{100} - (50.8)^2}$$

$$S = \sqrt{2840 - 2580.64} = \sqrt{259.36} = 16.1$$

مثال 21 احسب الانحراف المعياري لأعمار مجموعة من الأشخاص :

فئة العمر	- 12	- 22	- 32	- 42	- 52	62 - 72
عدد الاشخاص	3	5	8	4	2	1

الحـل /

$$S = \sqrt{\frac{35287}{23} - \left(\frac{851}{23}\right)^2}$$

$S = \sqrt{165.2174} = 12.85$ تقريباً

x	f	x f	x^2 f
17	3	51	867
27	5	135	3645
37	8	296	10952
47	4	188	8836
57	2	114	6498
67	1	67	4489
	$\sum f = 23$	$\sum xf = 851$	$\sum x^2 f = 35287$



1 - أوجد المدى للقيم التالية 12 , 9 , 7, 8 , 0, 3 .

2 - عرف الانحراف المعياري .

3 - احسب الانحراف المعياري للقيم التالية : 2 , 4 , 6 , 8 , 10 .

الجواب S= 2.83

4 - الجدول التالي يبين توزيع مجموعة من الطلاب حسب أوزانهم .

احسب الانحراف المعياري .

الفئات	20 -	22 -	24 -	26 -	28 -	30 - 32
التكرار	5	10	20	10	5	2

الجواب S= 2.44

5 - اضف العدد (5) إلى كل من الأعداد الآتية : 3 , 6 , 2 , 1 7 , 5

ثم اثبت ان هذه الاضافة لا تؤثر على قيمة الانحراف المعياري ولكنها تؤثر على

قيمة الوسط الحسابي .

[3 - 7 - 5] الأرتباط : Correlation

تعريف (5 - 5) :

الارتباط : هو العلاقة الرياضية بين متغيرين ، بحيث اذا تغير أحدهما باتجاه معين يميل الآخر إلى التغير في اتجاه معين ايضاً فاذا كان التغير في الحالتين باتجاه واحد سمي الارتباط طردياً أما اذا كان باتجاهين متعاكسين سمي التغير عكسياً ويرمز له (r).

معامل الارتباط الخطي (بيرسون)

تقاس قوة الارتباط بين الظواهر بمقياس يسمى معامل الارتباط الخطي ويرمز له (r) فإذا كان لدينا n من (أزواج القيم) $(x_1, y_1),(x_2, y_2),\dots,(x_n, y_n)$ من الظاهرتين (y), (x) فإن معامل الارتباط الخطي (بيرسون) يحسب باحدى الصيغتين :

$$(1)\quad r = \frac{\frac{1}{n}\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{S_x \; S_y}$$

$$(2)\quad r = \frac{\frac{1}{n}\sum (x\,y) - (\bar{x}\,\bar{y})}{S_x \; S_y}$$

حيث أن $\bar{x}$ = الوسط الحسابي للظاهرة x .

$\bar{y}$ = الوسط الحسابي للظاهرة y .

S_x = الانحراف المعياري للظاهرة x .

S_y = الانحراف المعياري للظاهرة y .

اي أن لحساب معامل الارتباط يلزمنا الحصول على :

أ - الوسط الحسابي لكل من الظاهرتين x , y .

ب - الانحراف المعياري لكل منهما .

جـ - مجموع حواصل ضرب كل من الظاهرتين اي $\sum x\,y$

أو $\sum (x - \overline{x})\,(y - \overline{y})$ والتعويض في احد القانونين السابقتين .

بعض خصائص معامل الارتباط

لمعامل الارتباط الخطي بعض الخصائص الهامة نذكر منها :

1- تكون r موجبة في حالة الارتباط الطردي (الموجب) .

2- تكون r سالبة في حالة الارتباط العكسي (السالب) .

3- قيمة r تساوي صفراً في حالة انعدام الارتباط .

4- قيمة r تساوي $+1$ في حالة الارتباط الطردي التام .

5- قيمة r تساوي -1 في حالة الارتباط العكسي التام .

ويلاحظ مما سبق أن قيمة معامل الارتباط تنحصر بين [$+1$, -1] وكلما اقتربت قيمة معامل الارتباط من $+1$ أو -1 كان هذا دليلاً على قوة الارتباط بين الظاهرتين وكلما اقتربت قيمته من الصفر كان هذا دليلاً على انعدام الارتباط .



افرض أن x , y الموضحة في الجدول التالي تمثل قيم ظاهرتين .

المطلوب معرفة الارتباط بينهما .

x	3	2	1	4	5
y	2	4	6	8	10

الحـــل /

x	y	x^2	y^2	xy
3	2	9	4	6
2	4	4	16	8
1	6	1	36	6
4	8	16	64	32
5	10	25	100	50
		$\sum x^2=55$	$\sum y^2=220$	$\sum xy=102$

$$\bar{x} = \frac{15}{5} = 3$$

$$\bar{y} = \frac{30}{5} = 6$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{5} \times 55 - 9} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{1}{5} \times 220 - 36} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n}\sum (x\,y) - (\bar{x}\,\bar{y})}{S_x \; S_y} = \frac{\frac{1}{5} \times 102 - 3 \times 6}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}}$$

$$r = \frac{20.4-18}{4} = 0.6$$

ومن هذه النتيجة فإن الارتباط بين الظاهرتين طردي ، ولكنه ليس قوياً فقيمة (r) فوق المتوسط.



جد معامل الارتباط بين **المتغيرين** x , y من الجدول الآتي :

x	2	3	4	5	6
y	4	6	8	10	12



الحــل / نحسب الوسط الحسابي لكل من المتغيرين .

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$
2	4	-2	-4	4	16	8
3	6	-1	-2	1	4	2
4	8	0	0	0	0	0
5	10	1	2	1	4	2
6	12	2	4	4	16	8
$\sum x=20$	$\sum y=40$	/	/	$\sum(x-\bar{x})^2=10$	$\sum(y-\bar{y})^2=40$	$\sum(x-\bar{x})(y-\bar{y})=20$

$$\bar{x} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{40}{5} = 8$$

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{10}{5}} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum(y-\bar{y})^2}{n}} = \sqrt{\frac{40}{5}} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{5} \times 20}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{4}{4} = 1$$

∴ الإرتباط طردي تام

طريقة أخرى لحل المثال :

$$S_x = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

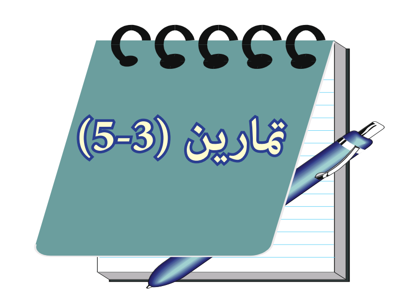
$$S_x = \sqrt{\frac{1}{5} \times 90 - 16} = \sqrt{2}$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum y^2}{n} - (\bar{y})^2} = \sqrt{\frac{1}{5} \times 360 - 64} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$r = \frac{\frac{1}{n} \sum (x\,y) - (\bar{x}\,\bar{y})}{S_x \; S_y}$$

$$r = \frac{\frac{1}{5} \times 180 - (4 \times 8)}{\sqrt{2} \times 2\sqrt{2}} = \frac{4}{4} = 1$$

∴ الارتباط طردي تام



1- جد معامل الارتباط بين قيم الظاهرتين x ، y من البيانات التالية :

x	1	2	3
y	2	4	6

الجواب $r = +1$

الارتباط طردي تام

2- في الجدول المبين في السؤال الأول لو ضربت قيم الظاهرة x في 4 نحصل

على جدول آخر وهو :

x	4	8	12
y	2	4	6

جد معامل الإرتباط وقارن النتيجة مع نتيجة السؤال الأول .

3- جد معامل الارتباط في الجدول التالي :

x	2	4	6	8	10
y	1	2	3	4	5

المحتويات


تم
بحمده